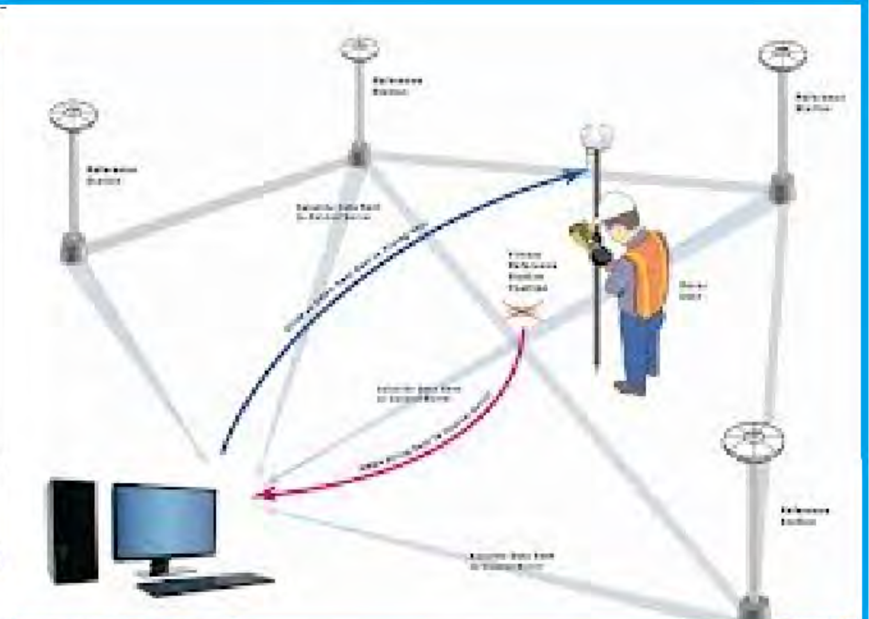
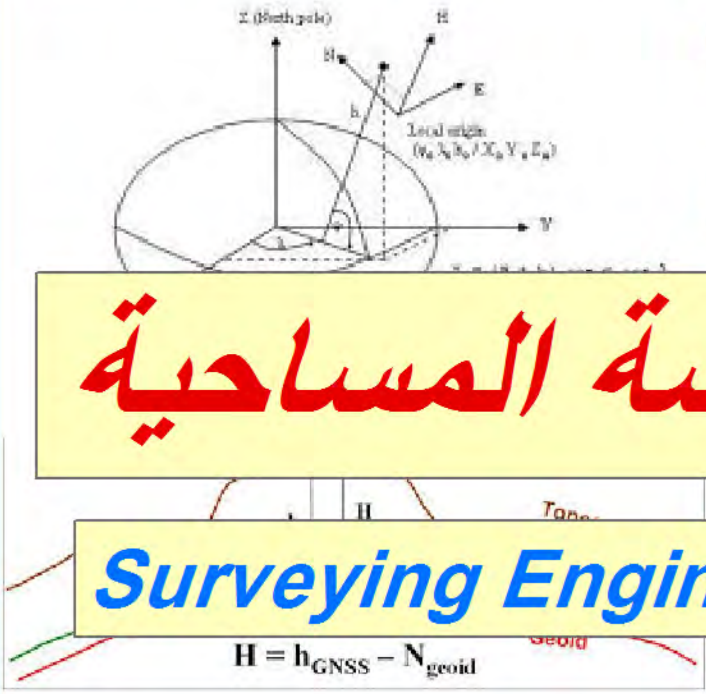
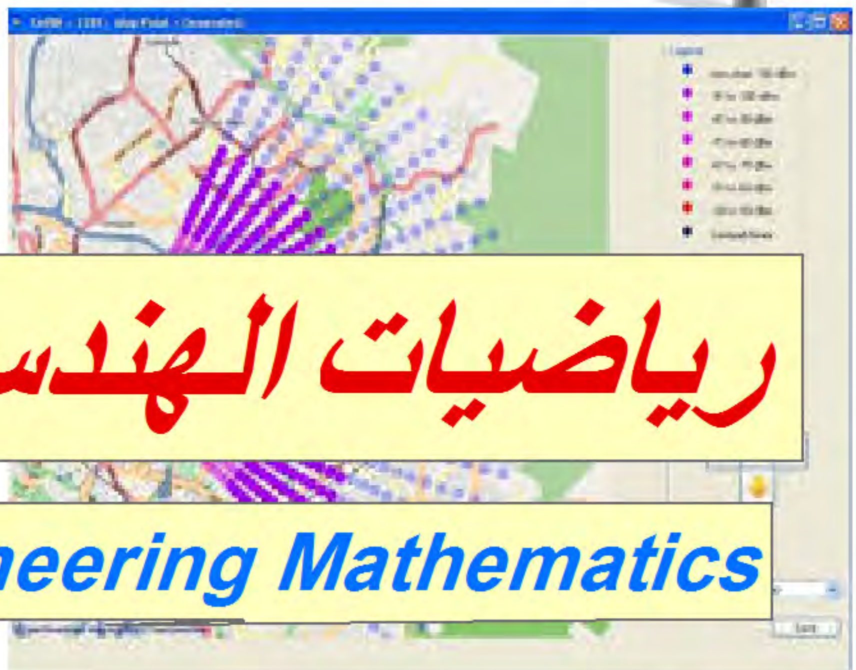


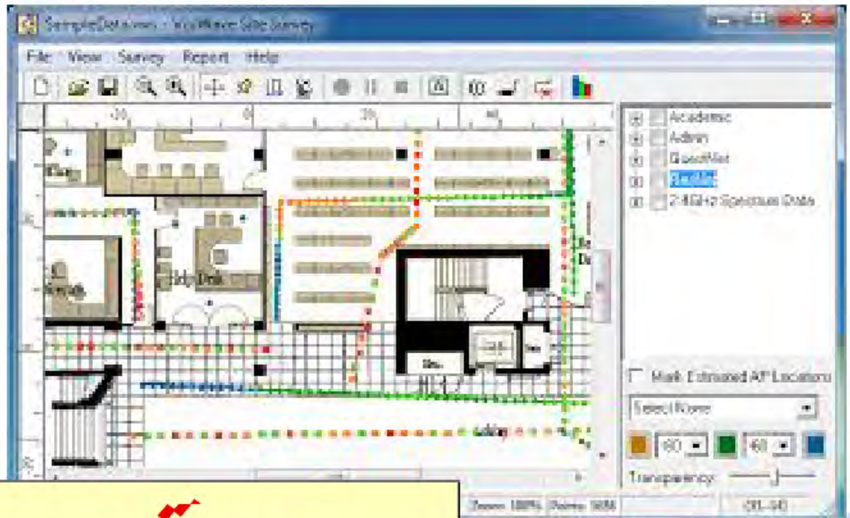




رياضيات الهندسة المساحية

Surveying Engineering Mathematics

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{GDA} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} + (1+ds)\times \cdots \begin{pmatrix} 1, & r_z, & -r_y \\ -r_z, & 1, & r_x \\ r_y, & -r_x, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{AGD}$$



د. جمعة محمد داود

2014 / 1435

رياضيات الهندسة المساحية

Surveying Engineering Mathematics

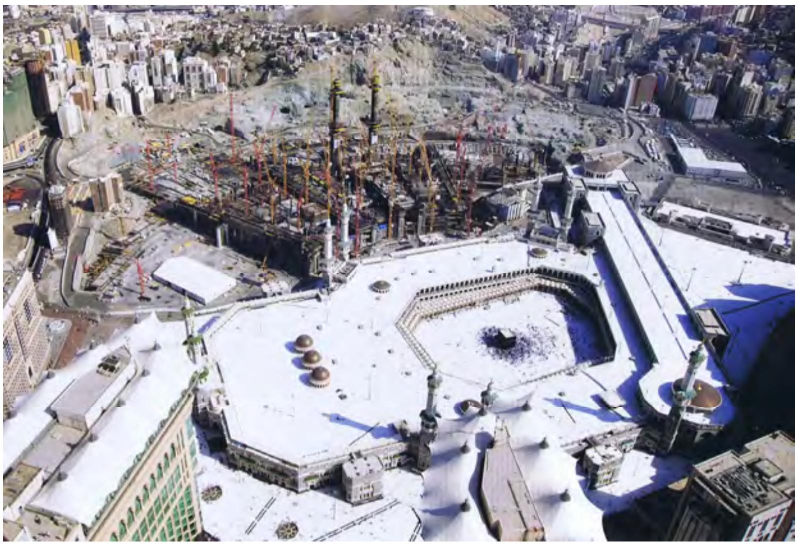
د. جمعة محمد داود

Gomaa M. Dawod

النسخة الأولي

١٤٣٥ هـ / ٢٠١٤م

بسم الله الرحمن الرحيم



<u>اتفاقية الاستخدام</u>

للإشارة إلى هذا الكتاب - كمرجع – برجاء إتباع النموذج التالي:

<u>باللغة العربية:</u>

داود ، جمعة محمد ، ٢٠١٤ ، رياضيات الهندسة المساحية ، مكة المكرمة ، المملكة العربية السعودية.

<u>باللغة الانجليزية:</u>

Dawod, Gomaa M., 2014, Surveying Engineering Mathematics (in Arabic), Holy Makkah, Saudi Arabia.

مقدمة النسخة الأولى

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ و الحمد لله العليم القدير الذي وهبني علما ووفقني في حياتي ، والصلاة والسلام علي معلم الأمم و خير البرية محمد بن عبد الله عليه الصلاة و السلام.

أدعو و أبتهل إلى مولاي و خالقي عز و جل أن يتقبل مني هذا العمل لوجهه الكريم فما أردت إلا إرضاؤه تعالى وتحقيقا لقول رسوله الكريم أن عمل ابن ادم ينقطع بعد موته إلا من ثلاث أحدهم: علم ينتفع به.

يخطأ الكثيرون في الاعتماد علي برامج الكمبيوتر و البرامج المحملة علي الأجهزة المساحية اعتمادا تاما في إجراء جميع الحسابات في تطبيقات المساحة، **فالهندسة المساحية علم وليست مجرد تقنية**. وان لم يدرك مهندسو المساحة و الجيوماتكس الأسس العلمية لعلم المساحة فغالبا ما يجدون أنفسهن أمام مشكلات كبيرة لا يعرفون كيفية حلها.

ومن هنا جاءت فكرة هذا الكتاب الذي يهدف للتعريف **بالمبادئ والمفاهيم الأساسية للتطبيقات الرياضية و طرق الحساب في علم الهندسة المساحية** بما يناسب طلاب المستوي الأول بالمرحلة الجامعية. والكتاب الحالي - وكما هو واضح من اسمه - يهتم بالجانب الرياضي فقط ولا يناقش أو يتعرض لطرق الرصد أو الأجهزة المساحية حيث أن لي كتابين سابقين أحدهما عن مبادئ المساحة بصفة عامة والآخر عن المساحة الجيوديسية تحديدا.

والكتاب الحالي هو **العاشر** - بفضل الله تعالى و توفيقه - من سلسلة كتبي الرقمية المخصصة لوجه الله تعالى وابتغاء مرضاته، وهي الموجودة في العديد من مواقع شبكة الانترنت. كما أود أن أشير لقيامي بترجمة بعض المصطلحات التقنية إلي اللغة العربية، فان كنت قد أصبت في الترجمة فلي أجر و إن كنت قد أخطأت فلي أجران كما قال رسول الله صلى الله عليه وسلم، فأرجو ألا تستغربوا من بعض هذه المصطلحات العربية الجديدة.

أدعو كل قارئ و كل مستفيد من هذا الكتاب أن يدعو الله تبارك و تعالى أن يغفر لي و لوالدي ، وأيضا ألا يحرمني من رأيه و تعليقاته وتصويباته - فلا يوجد كتاب إلا و به نواقص و أخطاء - سواء عبر البريد الالكتروني أو عبر منتدى الهندسة المساحية في:

http://surveying.ahlamontada.com/

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ ..... **وقل ربي زدني علما** .... صدق الله العظيم.

جمعة محمد داود

dawod_gomaa@yahoo.com

مكة المكرمة: رمضان ١٤٣٥ هـ

إهداء

إلي من غرس في نفسي حب العلم وأنا صغيرا

إلي من لن أنسه فضله ما حييت

إلي أستاذي في المدرسة الابتدائية

الأستاذ / محمود مصطفي

(رحمة الله عليه)

كتب أخري للمؤلف

١- المدخل إلى الخرائط

٢- المدخل إلى الخرائط الرقمية

٣- التحليل المكاني في إطار نظم المعلومات الجغرافية

٤- مبادئ المساحة

٥- المدخل إلى النظام العالمي لتحديد المواقع

٦- أسس المساحة الجيوديسية و الجي بي أس

٧- مقدمة في الصور الجوية و المرئيات الفضائية

٨- الجيوماتكس: علم المعلوماتية الأرضية

٩- مبادئ علم نظم المعلومات الجغرافية

وكل هذه الكتب المجانية (بالإضافة لمواد تدريبية و ملفات تعليمية أخري) متاحة للتحميل كاملة في عدد كبير من مواقع شبكة الانترنت و منهم علي سبيل المثال:

- صفحتي علي موقع أكاديميا في الرابط:

http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod

- المكتبة الرقمية المساحية المجانية في الرابط:

http://www.4shared.com/u/vJBH8xk_/__online.html

- صفحتي علي موقع جامعة أم القرى في الرابط:

http://www.uqu.edu.sa/staff/ar/4260086

بالإضافة إلي ٣٢ محاضرة فيديو علي اليوتيوب في قناتي بالرابط:

https://www.youtube.com/channel/UCcVBq89iSKrtYhxdyuQKIqA

قائمة المحتويات

تابع المحتويات

تابع المحتويات

صفحة

تابع المحتويات

صفحة

صفحة | تابع المحتويات

تابع المحتويات صفحة

الباب الأول: أسس رياضية

الفصل الأول: الإحداثيات المساوية

الفصل الثاني: الأخطاء في القياسات

الفصل الثالث: جبر المصفوفات

الفصل الأول

الإحداثيات المستوية

١-١ مقدمة

يتناول هذا الفصل بعض أسس الرياضيات المستخدمة في تطبيقات المساحة المستوية وخاصة الوحدات المستخدمة في القياسات المساحية و نظام الإحداثيات المستوية (ثنائية الأبعاد) وأيضا معادلات حساب مساحة الأشكال الهندسية البسيطة بالإضافة لعرض أنواع المسافات و الزوايا و الانحرافات المستخدمة في المساحة المستوية.

١-٢ وحدات القياس

١-٢-١ وحدات القياس الطولية

يوجد نظامين مستخدمين في قياس المسافات و الأطوال وهما النظام الدولي والنظام الانجليزي.

في النظام الدولي (يسمي أيضا النظام الفرنسي) ويرمز له بالرمز SI يتم استخدام وحدات المتر و مشتقاته كالآتي:

١ متر (م)	= ١٠ ديسيمتر (دسم)
١ ديسيمتر (دسم)	= ١٠ سنتيمتر (سم)
١ سنتيمتر (سم)	= ١٠ ملليمتر (مم)
ا كيلومتر (كم)	= ١٠٠٠ متر (م)

أي أن:

١ متر (م)	= ١٠٠ سنتيمتر (سم)
١ متر (م)	= ١٠٠٠ ملليمتر (مم)
ا كيلومتر (كم)	= ١٠،٠٠٠ ديسيمتر (دسم)
ا كيلومتر (كم)	= ١٠٠،٠٠٠ سنتيمتر (سم)
ا كيلومتر (كم)	= ١،٠٠٠،٠٠٠ ملليمتر (مم)

أما في النظام الانجليزي فيتم استخدام وحدات القدم و مشتقاته كالآتي:

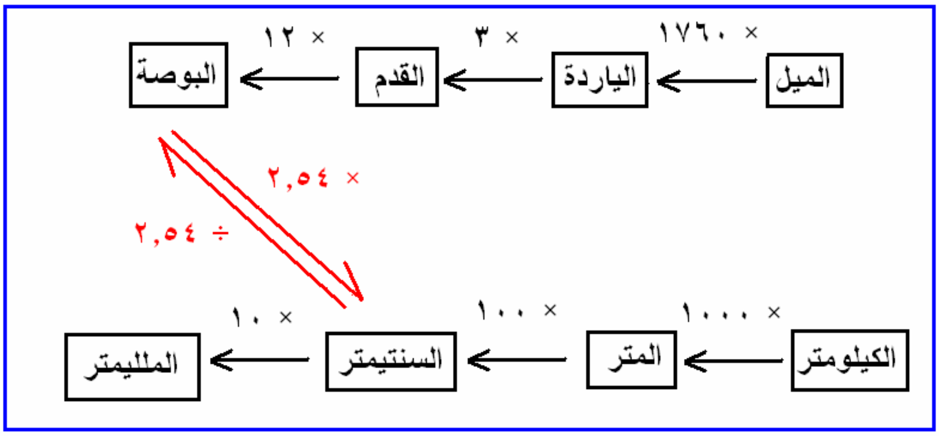
١ ميل	= ١٧٦٠ ياردة
١ ياردة	= ٣ قدم
١ قدم	= ١٢ بوصة

للتحويل بين كلا نظامي القياسات الطولية فتوجد عدة علاقات رياضية تشمل:

١ متر	= ٣.٢٨٠٨	قدم
١ متر	= ٣٩.٣٧	بوصة
١ متر	= ٣	ياردة

١ كيلومتر	= ٠.٦٢١٢٧	ميل
١ بوصة	= ٢.٥٤	سنتيمتر
١ قدم	= ٣٠.٤٨	سنتيمتر
١ ياردة	= ٠.٩١٤٤	متر
١ ميل	= ١٦٠٩.٣٥	متر
١ ميل	= ١.٦٠٩٣٤	كيلومتر

للسهولة يمكن الاكتفاء بمعرفة علاقة رياضية واحدة فقط للتحويل بين كلا النظامين كما في المثال التالي:



شكل (١-١) التحويل بين نظم الوحدات الطولية

أحسب طول الطريق بين مكة المكرمة و الرياض بالميل إذا علمت أن طوله يبلغ ٨٨٠ كيلومتر؟

الطول = ٨٨٠ ×١٠٠٠ × ١٠٠ / (٢.٥٤ × ١٢ × ٣ × ١٧٦٠)
= ٥٤٦.٨٠٦ ميل

أحسب طول ملعب كرة قدم بالمتر إن كان طوله يساوي ١٠٠ ياردة؟

الطول = ١٠٠ × ٣ × ١٢ × ٢.٥٤ / (١٠٠)
= ٩١.٤٤ متر

١-٢-٢ وحدات قياس المساحات

١ متر مربع	= ١٠٠ × ١٠٠	= ١٠٠٠٠	سنتيمتر مربع
١ كيلومتر مربع	= ١٠٠٠ × ١٠٠٠	= ١٠٠٠٠٠٠	متر مربع

نظام وحدات قياس المساحات (وخاصة الزراعية) في المملكة العربية السعودية:

١ دونم	=	١٠٠٠	متر مربع
١ هكتار	=	١٠	دونم

١ هكتار	=	١٠٠٠٠	متر مربع
١ كيلومتر مربع	=	١٠٠	هكتار

نظام وحدات قياس المساحات (وخاصة الزراعية) في جمهورية مصر العربية:

١ فدان	=	٢٤	قيراط
١ قيراط	=	٢٤	سهم

١ فدان	=	٤٢٠٠.٨٣	متر مربع
١ قيراط	=	١٧٥.٠٩	متر مربع
١ سهم	=	٧.٢٩	متر مربع

١-٢-٣ وحدات قياس الحجوم

١ متر مكعب = ١٠٠ × ١٠٠ × ١٠٠ = ١،٠٠٠،٠٠٠ سنتيمتر مكعب
١ متر مكعب = ١٠٠٠ لتر
١ لتر = ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب

١-٣ مساحة الأشكال الهندسية

مساحة المربع = مربع طول الضلع = طول الضلع × نفسه (١-١)

مساحة المستطيل = الطول × العرض (١-٢)

مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع (١-٣)

مساحة المعين = القاعدة × الارتفاع أو = نصف حاصل ضرب القطرين (١-٤)

مساحة شبه المنحرف = نصف مجموع القاعدتين × الارتفاع (١-٥)

مساحة الشكل الرباعي = نصف حاصل ضرب القطرين × جيب الزاوية المحصورة بينهما (١-٦)

مساحة الدائرة = مربع نصف قطر الدائرة × ط = ط (نق)^{٢} (١-٧)

حيث:
ط = ٧/٢٢ ، نق = نصف قطر الدائرة

مساحة سطح الكرة = ٤ ط (نق)^{٢} (١-٨)

مساحة الشكل البيضاوي = ط × نصف المحور الأكبر × نصف المحور الأصغر (١-٩)

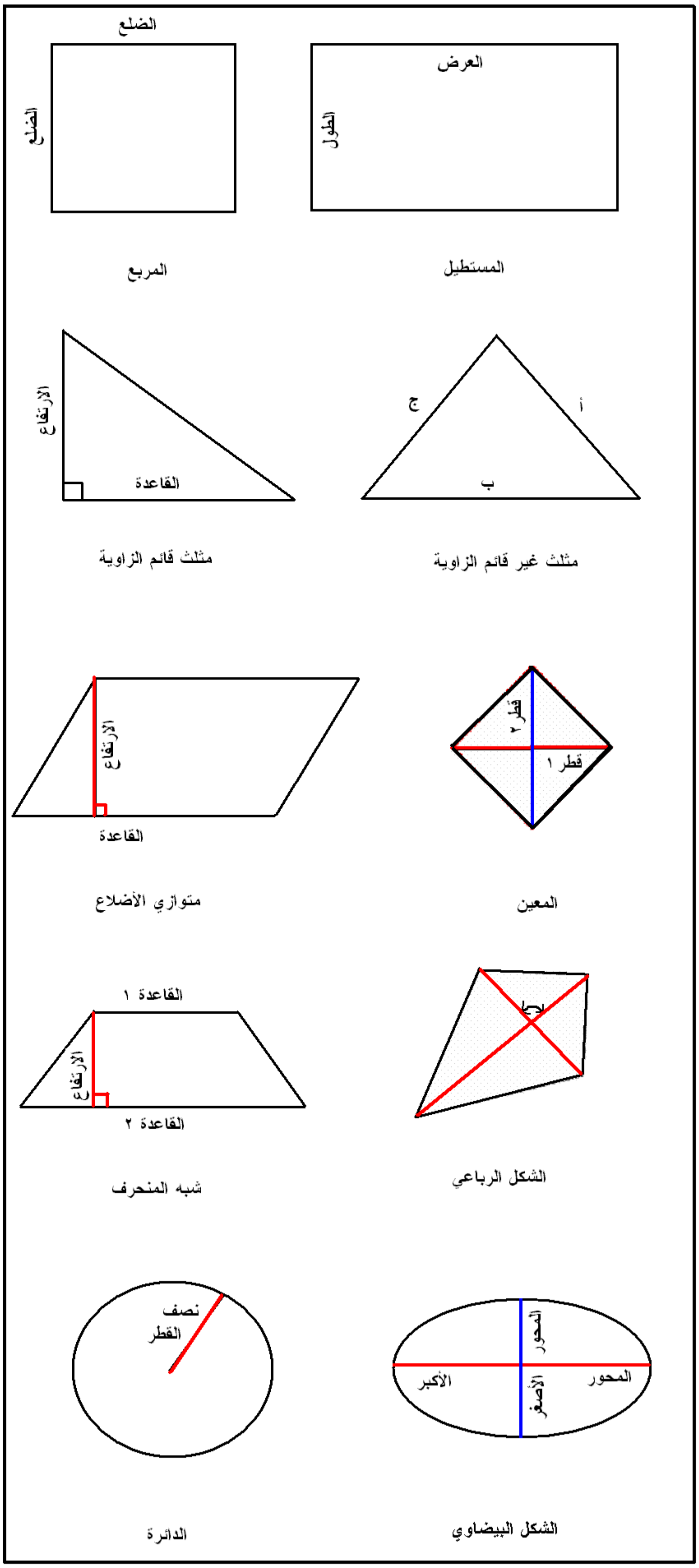
مساحة المثلث القائم الزاوية = ٠.٥ × القاعدة × الارتفاع (١-١٠)

مساحة المثلث غير قائم الزاوية = الجذر التربيعي [س × (س-أ) × (س-ب) × (س-ج)] (١-١١)

حيث:

أ ، ب ، ج قيم أطوال الأضلاع الثلاثي للمثلث

س = نصف مجموع أضلاع المثلث = (أ + ب + ج) ÷ ٢



شكل (١-٢) الأشكال الهندسية البسيطة

<u>قاعدة سيمبسون لحساب مساحة شكل غير منتظم:</u>

تعد هذه الطريقة من أفضل طرق حساب مساحة شكل غير منتظم عن طريق تقسيمه إلي عدد من الأشكال من خلال عدد من الأعمدة علي مسافات متساوية. فإذا كان عدد الأقسام المحصورة بين الأعمدة عددا زوجيا يتم حساب المساحة كالتالي:

المساحة = (س/٣) (طول العمود الأول + طول العمود الأخير + ٢ مجموع أطوال الأعمدة الفردية + ٤ مجموع أطوال الأعمدة الزوجية)

حيث:

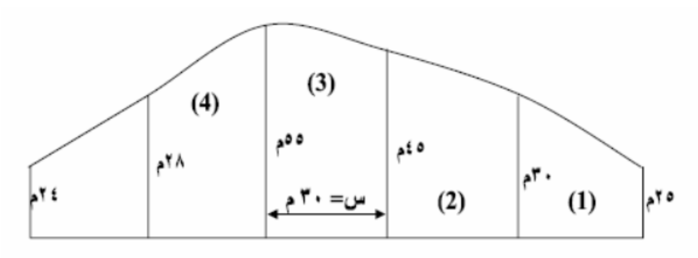
س = عرض القسم = المسافة بين كل عمودين متتاليين.

مع مراعاة:

- يجب أن يكون عدد الأقسام زوجيا.
- عند أخذ الأعمدة الفردية لا يؤخذ الأول و الأخير مرة أخري.
- إذا كان عدد الأقسام فرديا يحذف (غالبا) العمود الأخير ويتم حساب مساحة الجزء الأخير علي أنه شبه منجرف أو مثلث ثم تضاف مساحته للمساحة الناتجة من المعادلة السابقة.

<u>مثال ١:</u>

أوجد مساحة قطعة الأرض في الشكل التالي:



س = ٥

بما أن عدد الأقسام فردي: نأخذ الأقسام ١، ٢، ٣ ، ٤ ونحسب مساحتهم بالمعادلة:

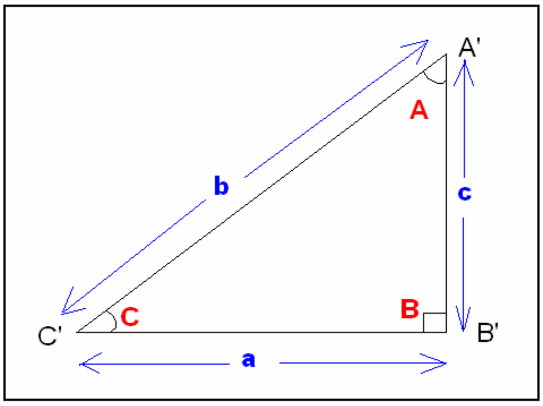
المساحة = (س/٣) (طول العمود الأول + طول العمود الأخير + ٢ مجموع أطوال الأعمدة الفردية + ٤ مجموع أطوال الأعمدة الزوجية)

= (٣/٣٠) (٢٥ + ٢٨ + ٢ (٤٥) + ٤ (٣٠ + ٥٥))
= ١٠ (٥٣ + ٩٠ + ٢٤٠) = ٤٨٣٠ متر مربع

مساحة الجزء الأخير (كشبه منحرف) = القاعدة المتوسطة × الارتفاع
= (٢٨ + ٢٤) × ٣٠ = ٧٨٠ متر مربع

إذن:
مساحة الأرض الكلية = ٤٨٣٠ + ٧٨٠ = ٥٦١٠ متر مربع

المثلث قائم الزاوية:



شكل (١-٣) المثلث قائم الزاوية

النسب المثلثية:

جا أو sin لأي زاوية = طول الضلع المقابل / طول الوتر (١-١١)

جتا أو cos لأي زاوية = طول الضلع المجاور / طول الوتر (١-١٢)

ظا أو tan لأي زاوية = طول الضلع المقابل / طول الضلع المجاور (١-١٣)

في المثلث الموضح فأن:

$$\text{Sin } C = c / b , \quad \cos C = a / b , \quad \tan C = c / a \qquad (1\text{-}14)$$

معادلة فيثاغورث:

مربع طول الوتر = مربع طول المقابل + مربع طول المجاور

$$b^2 = a^2 + c^2 \qquad (1\text{-}15)$$

So:

$b = \sqrt{(a^2 + c^2)}$
$a = \sqrt{(b^2 - c^2)}$
$c = \sqrt{(b^2 + a^2)}$

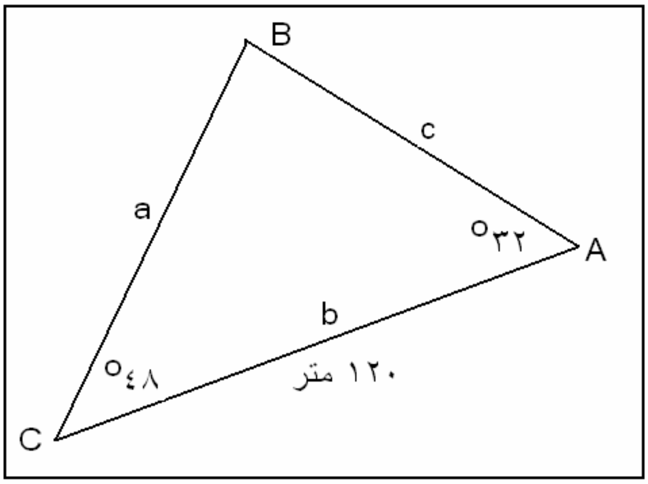
قانون جيب الزاوية:

لأي مثلث سواء كان قائم الزاوية أو لا فأن:

طول الضلع الأول / جا الزاوية المقابلة له = طول الضلع الثاني / جا الزاوية المقابلة له = طول الضلع الثالث / جا الزاوية المقابلة له

$$a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C \qquad (1\text{-}16)$$

وبذلك يمكن حل المثلث (أي حساب باقي معلوماته) إذا علمنا منه زاويتين و ضلع:



شكل (١-٤) مثال للمثلث غير قائم الزاوية

مثال:

$$B = 180^{\circ} - (32^{\circ} + 48^{\circ}) = 100^{\circ}$$

$$120 / \sin 100^{\circ} = a / \sin 32^{\circ} = c / \sin 48^{\circ}$$

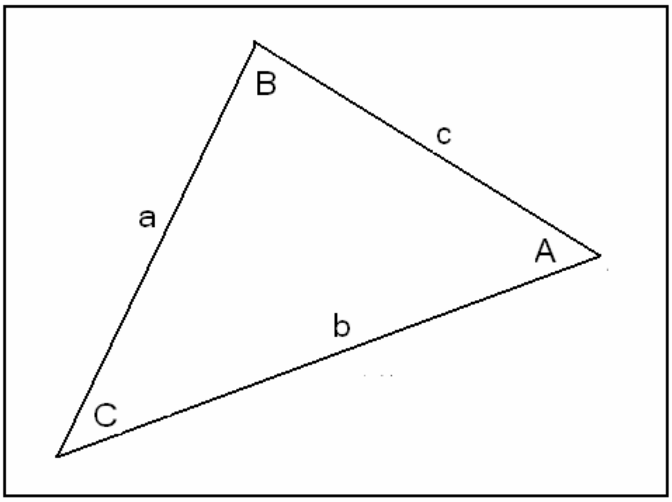
$$a = 120 \times \sin 32^{\circ} / \sin 100^{\circ} = 64.57 \text{ m}$$

$$c = 120 \times \sin 48^{\circ} / \sin 100^{\circ} = 90.55 \text{ m}$$

قانون جيب تمام الزاوية:

لأي مثلث سواء كان قائم الزاوية أو لا فأن:

مربع طول أي ضلع = مجموع مربعي الضلعين الآخرين ناقص ضعف حاصل ضربهما في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما:



شكل (١-٥) المثلث غير قائم الزاوية

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A \qquad (1\text{-}17)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B \qquad (1\text{-}18)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C \qquad (1\text{-}19)$$

وبذلك يمكن حل المثلث (أي حساب باقي معلوماته) إذا علمنا منه ضلعين و زاوية.

معادلات مثلثيه أخري:

$$\sec = 1 / \cos \qquad (1\text{-}20)$$

حيث: sec = قا الزاوية

$$\csc = 1 / \sin \qquad (1\text{-}21)$$

حيث: csc = قتا الزاوية

$$\cot = 1 / \tan \qquad (1\text{-}22)$$

حيث: cot = ظتا الزاوية

$\sin^2 + \cos^2 = 1$ (1-23)

$\tan^2 + 1 = \sec^2$ (1-24)

$\cot^2 + 1 = \csc^2$ (1-25)

$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ (1-26)

$\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ (1-27)

$\tan (A+B) = (\tan A + \tan B) / (1 – \tan A \tan B)$ (1-28)

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ (1-29)

$\cos 2A = \cos^2 A – \sin^2 A = 1 – 2 \sin^2 A = (2 \cos^2 A) – 1$ (1-30)

$\tan 2A = (2 \tan A) / (2 \cot A)$ (1-31)

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ (1-32)

$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ (1-33)

$\tan (A+B) = (\tan A - \tan B) / (1 + \tan A \tan B)$ (1-34)

$\sin (A/2) = \pm \surd [(1 – \cos A) / 2]$ (1-35)

$\cos (A/2) = \pm \surd [(1 + \cos A) / 2]$ (1-36)

$\tan (A/2) = \pm \surd [(1 – \cos A) / (1+\cos A)]$ (1-37)

١-٤ الإحداثيات المستوية

عادة يرمز للمحور الشمالي أو الرأسي (في المساحة) بالرمز N بدلا من استخدام الرمز Y، ويرمز للمحور الشرقي أو الأفقي بالرمز E بدلا من X. وبذلك فأن الإحداثيات الأفقية لأي نقطة ستكون E,N (أي الشرقيات و الشماليات Northing and Easting) بدلا من X,Y (حيث أن الإحداثيات X,Y,Z غالبا ما ترمز للإحداثيات الجيوديسية ثلاثية الأبعاد).

يمكن بمعرفة الإحداثيات المستوية ثنائية الأبعاد لنقطتين حساب طول المسافة بينهما و أيضا انحراف الخط الواصل بينهما عن اتجاه الشمال كالتالي:

$$D = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2} \tag{1-38}$$

المسافة = الجذر التربيعي (مربع فرق الإحداثيات الشمالية + مربع فرق الإحداثيات الشرقية)

$$\tan \alpha = \Delta E / \Delta N \tag{1-39}$$

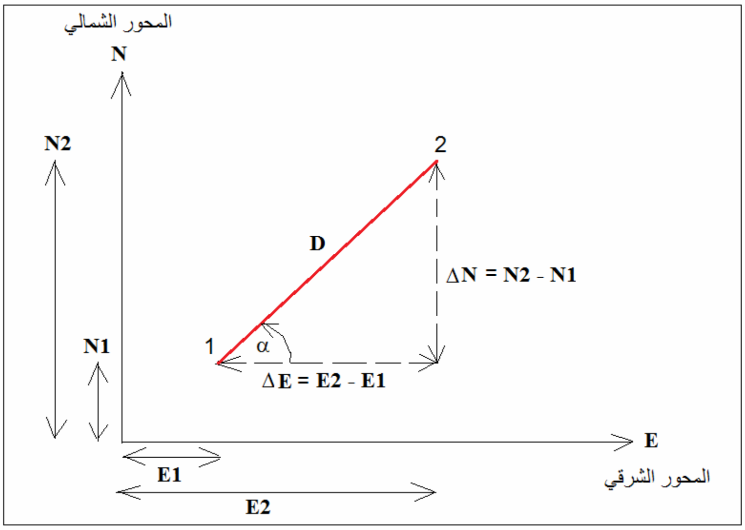
ظا الانحراف = فرق الإحداثيات الشرقية ÷ فرق الإحداثيات الشمالية

$$\Delta N = N_2 - N_1 \tag{1-40}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 \tag{1-41}$$

حيث:

D هي المسافة، α هو الانحراف، ΔN فرق الإحداثيات الشمالية، ΔE فرق الإحداثيات الشرقية.



شكل (١-٦) الإحداثيات المستوية

مثال:

أحسب المسافة بين النقطتين A,B وكذلك الانحراف بينهما إذا علمت أن إحداثيات النقطة A تبلغ ١٢٧٦٥.٤٨ متر و ٤٣٢٨٠.٢١ متر ، وأن إحداثيات النقطة B تساوي ١٣٦٩٦.٤١ متر و ٤٣٧٥٥.٩٨ متر.

ΔE = ١٣٦٩٦.٤١ - ١٢.٧٦٥.٤٨ = ٩٣٠.٩٣ متر

ΔN = ٤٣٧٥٥.٩٨ - ٤٣٢٨٠.٢١ = ٤٧٥.٧٧ متر

المسافة D = √ [(٩٣٠.٩٣)^٢ + (٤٧٥.٧٧)^٢] = ١٠٤٥.٤٦ متر

ظا الانحراف = ٩٣٠.٩٣ ÷ ٤٧٥.٧٧ = ١.٩٥٦٦٨٠٧٥

الانحراف = ٤٧" ٥٥' ٦٢°

وفي حالة معرفة إحداثيات النقطة الأولي وطول و انحراف الخط يمكن حساب إحداثيات النقطة الثانية كالتالي:

$$N_2 = N_1 + D\cos\alpha \qquad (1\text{-}42)$$

$$E_2 = E_1 + D\sin\alpha \qquad (1\text{-}43)$$

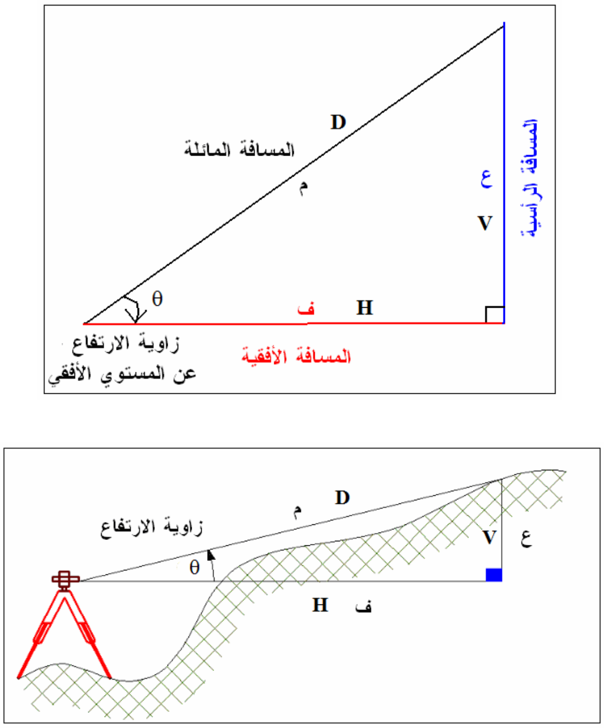
وهاتين المعادلتين مستخدمات في حسابات المضلعات (الترافرس) كما سنتعرض له في فصل قادم بالتفصيل.

١-٥ المسافات وأنواعها

تنقسم المسافات إلي ثلاثة أنواع: الأفقية والمائلة و الرأسية.

عند قياس المسافة بين نقطتين يقعان علي مستوي أفقي واحد (لا يوجد فرق ارتفاع بينهما) فهذه المسافة تسمي المسافة الأفقية. بينما إذا كانت احدي النقطتين مرتفعة عن الأخرى فالمسافة المقاسة بينهما يطبق عليها اسم المسافة المائلة. أما الفرق في المستوي الرأسي بين هاتين النقطتين (فرق الارتفاع بينهما) فيسمي المسافة الرأسية.

يجمع مثلث قائم الزاوية بين المسافات الثلاثة مما يمكننا من حساب مسافة من مسافة أخري بعدة طرق:



شكل (١-٧) أنواع المسافات

م^{٢} = ف^{٢} + ع^{٢}

$$D^2 = H^2 + V^2$$

<u>أي أن:</u>

ف = √ (م^{٢} - ع^{٢})   (١-٤٣)

$$H = \sqrt{D^2 - V^2}$$

وبذلك يمكن حساب المسافة الأفقية (التي يتم توقيعها علي الخرائط) بمعلومية قيمة المسافة المائلة (المقاسة في الطبيعة) والمسافة الرأسية (فرق الارتفاع بين النقطتين).

جتا (زاوية الارتفاع) = ف / م

$$\cos \vartheta = H / D$$

<u>أي أن:</u>

ف = م × جتا (زاوية الارتفاع)   (١-٤٤)

$$H = D \cos \vartheta$$

وبذلك يمكن حساب المسافة الأفقية (التي يتم توقيعها علي الخرائط) بمعلومية قيمة المسافة المائلة (المقاسة في الطبيعة) وقيمة زاوية الارتفاع بين النقطتين.

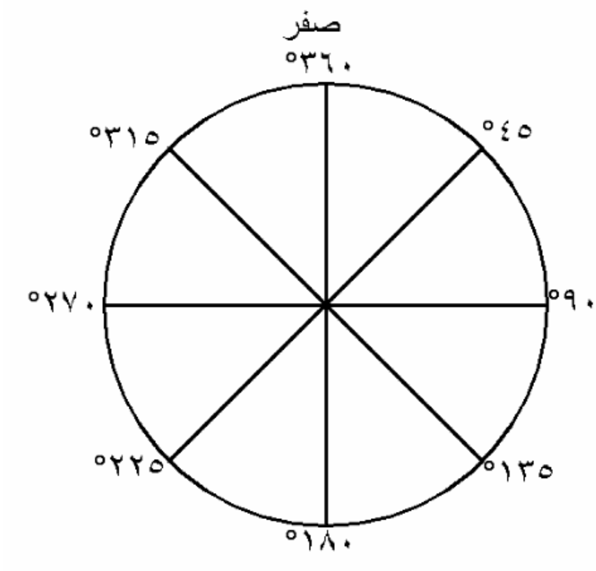
١-٦ الزوايا وأنواعها

١-٦-١ وحدات قياس الزوايا

توجد ثلاثة أنظمة لقياس الزوايا (والاتجاهات) وهي النظام الستيني و النظام المئوي و النظام الدائري:

النظام الستينى لقياس الزوايا:

في النظام الستيني تقسم الدائرة إلي ٣٦٠ قسما يسمي الجزء الواحد منها الدرجة الستينية ويرمز له بالرمز (°) ، ثم تقسم الدرجة الستينية الواحدة إلي ٦٠ جزءا يسمي الواحد منهم الدقيقة الستينية ويرمز له بالرمز (') ، ثم تقسم الدقيقة الستينية الواحدة إلي ٦٠ جزءا يسمي الواحد منهم الثانية الستينية ويرمز له بالرمز (").



شكل (١-٨) النظام الستيني لقياس الزوايا

أي أن:

١ درجة ستينية ° = ٦٠ دقيقة ستينية '
١ دقيقة ستينية ' = ٦٠ ثانية ستينية "
١ درجة ستينية ° = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ ثانية ستينية "

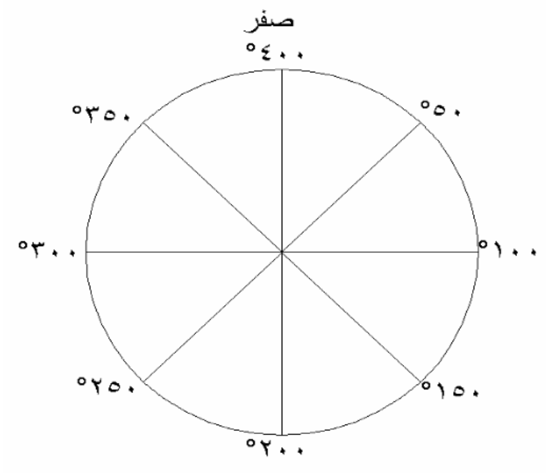
وتكتب الزاوية الستينية بالشكل التالي: ٤٥" ٥٢' ١٢٧° أي: ١٢٧ درجة و ٥٢ دقيقة و ٤٥ ثانية.

مثال:

الزاوية ٤٥" ٥٢' ١٢٧° = (٤٥" ÷ ٦٠) + ٥٢' ١٢٧° = ٥٢.٧٥' ١٢٧°
= (٥٢.٧٥' ÷ ٦٠)' + ١٢٧° = ١٢٧.٨٧٩١٦٧ °
= (٤٥" ÷ ٦٠) + (٥٢' ÷ ٦٠) + ١٢٧° = ١٢٧.٨٧٩١٦٧ °

النظام المئوى لقياس الزوايا:

في النظام المئوي (يسمي أيضا جراد) تقسم الدائرة إلي ٤٠٠ قسما يسمي الجزء الواحد منها الدرجة المئوية أو الجراد ويرمز له بالرمز (^{g}) ، ثم تقسم الدرجة المئوية الواحدة إلي ١٠٠ جزءا يسمي الواحد منهم الدقيقة المئوية ويرمز له بالرمز (^{c}) ، ثم تقسم الدقيقة المئوية الواحدة إلي ١٠٠ جزءا يسمي الواحد منهم الثانية المئوية ويرمز له بالرمز (^{cc}).



شكل (١-٩) النظام المئوي لقياس الزوايا

<u>أي أن:</u>

١ درجة مئوية ^{g} = ١٠٠ دقيقة مئوية ^{C}

١ دقيقة مئوية ^{C} = ١٠٠ ثانية مئوية ^{CC}

١ درجة مئوية ^{g} = ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠ ثانية مئوية ^{CC}

وتكتب الزاوية الستينية بالشكل التالي: ٣٧٢^{g} ٦٢^{C} ٨٥^{CC} أي: ٣٧٢ درجة و ٦٢ دقيقة و ٨٥ ثانية.

<u>مثال:</u>

الزاوية ٣٧٢^{g} ٦٢^{C} ٨٥^{CC}

= (٨٥^{CC} ÷ ١٠٠) + ٦٢^{C} ٣٧٢^{g} = ٦٢.٨٥^{C} ٣٧٢^{g}

= (٦٢.٨٥^{C} ÷ ١٠٠)^{C} + ٣٧٢^{g} = ٣٧٢.٦٢٨٥^{g}

= (٨٥^{CC} ÷ ١٠٠) + (٦٢^{C} ÷ ١٠٠) + ٣٧٢^{g} = ٣٧٢.٦٢٨٥^{g}

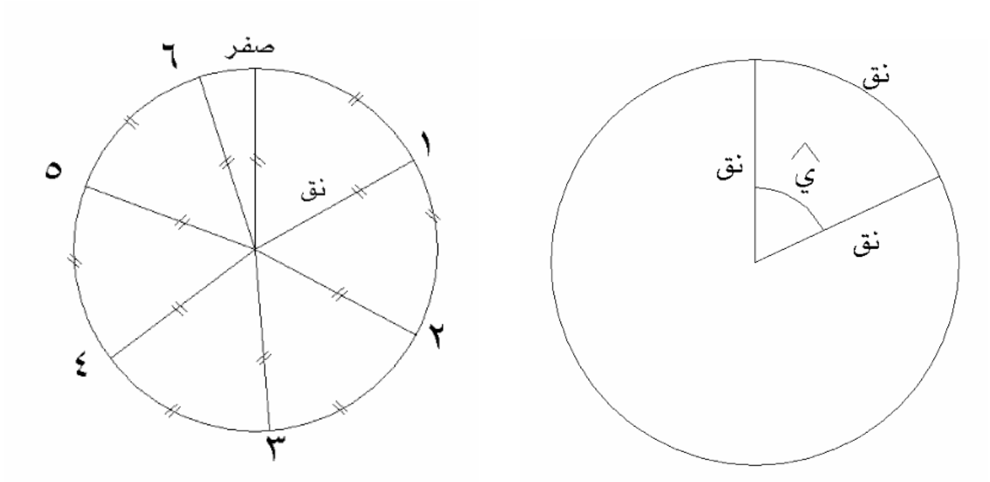
النظام الدائرى لقياس الزوايا:

يعادل التقدير الدائري لأي زاوية النسبة بين طول القوس الذي يقابل هذه الزاوية (المقطوع من دائرة مركزها رأس هذه الزاوية) ونصف قطر هذه الدائرة.

تقاس الزاوية الدائرية بوحدات تسمي "الراديان" - ويرمز له بالرمز ^{ر} - حيث يكون محيط الدائرة الكاملة = ٢ ط = ٢ × ٢٢ ÷ ٧ = ٦.٢٨٣١٨٥٣٠٧ راديان.

أي أن:

١ راديان = ٥٧.٢٩٥٧٧٩٥°
= ٥٧° ١٧' ٤٤.٨"
= ٢٠٦٢٦٥"
= ٦٣.٦٦١٩٩٧٢ g



شكل (١-١٠) النظام الدائري لقياس الزوايا

١-٦-٢ التحويل بين نظم قياس الزوايا

(أ) للتحويل بين النظام الستيني و النظام المئوي:

بما أن الدائرة تعادل ٣٦٠ درجة ستينية وفي نفس الوقت تعادل ٤٠٠ درجة مئوية ، أي أن:

٣٦٠ درجة ستينية = ٤٠٠ درجة مئوية

إذن:

١ درجة ستينية	= ١.١١١١١١	درجة مئوية
١ درجة مئوية	= ٠.٩	درجة ستينية

(ب) للتحويل بين النظام الستيني و النظام الدائري:

بما أن الدائرة تعادل ٣٦٠ درجة ستينية وفي نفس الوقت تعادل ٢ ط راديان ، أي أن:

٣٦٠ درجة ستينية = ٢ ط راديان

إذن:

١ درجة ستينية	= ط ÷ ١٨٠	راديان
١ درجة دائرية	= ١٨٠ ÷ ط	درجة ستينية

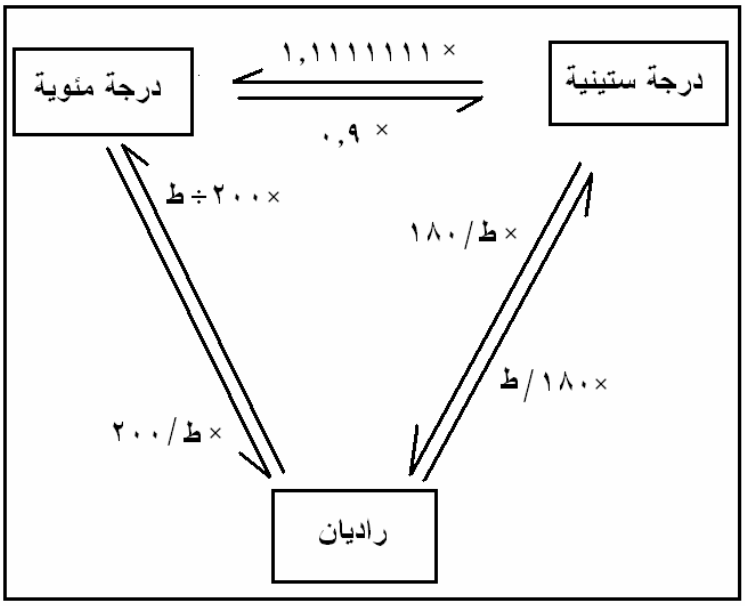
<u>(ج) للتحويل بين النظام المئوي و النظام الدائري:</u>

بما أن الدائرة تعادل ٤٠٠ درجة مئوية وفي نفس الوقت تعادل ٢ ط راديان ، أي أن:

٤٠٠ درجة مئوية = ٢ ط راديان

<u>إذن:</u>

١ درجة مئوية	= ط ÷ ٢٠٠	راديان
١ درجة دائرية	= ٢٠٠ ÷ ط	درجة مئوية



شكل (١-١١) التحويل بين نظم قياس الزوايا

<u>أمثلة:</u>

١- حول الزاوية المئوية ٤٥ CC ٨٠ C ١٧١ g إلي التقدير الستيني:

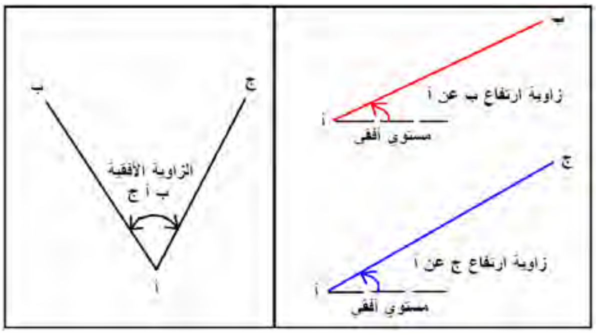
الزاوية = (٤٥÷١٠٠٠٠) + (٨٠÷١٠٠) + ١٧١ = ١٧١.٨٠٤٥ g
= ١٧١.٨٠٤٥ × ٠.٩ = ١٥٤.٦٢٤٠٥ °
= ٢٧" ٣٧" ١٥٤ °

٢- حول الزاوية ٢٧" ٣٧" ١٥٤ ° إلي التقدير الدائري:

الزاوية = (٢٧÷٣٦٠٠) + (٣٧÷٦٠) + ١٥٤ = ١٥٤.٦٢٤٠٥ °
= ١٥٤.٦٢٤٠٥ × ط / ١٨٠
= ٢.٦٩٩٧٨٥ راديان

١-٦-٣ أنواع الزوايا

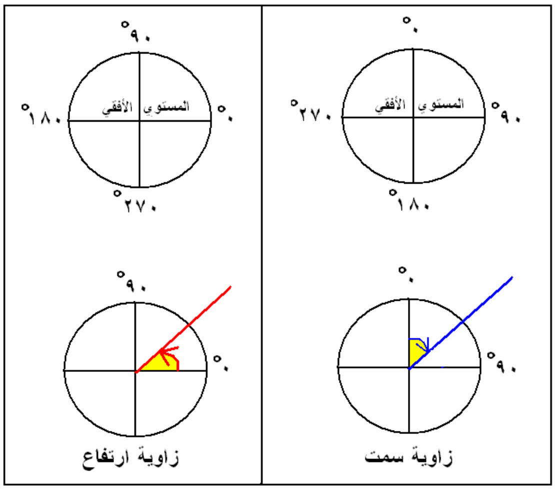
تنقسم الزوايا إلي نوعين: زاوية أفقية و زاوية رأسية. فالزاوية الأفقية هي الزاوية المحصورة في مستوي أفقي بين خطين (أو ضلعين). بينما الزاوية الرأسية هي الزاوية المقاسة في مستوي رأسي مقارنة بالمستوي الأفقي عند نقطة الرصد، وهي إما أن تكون زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض مقارنة بهذا المستوي الأفقي. ويجب ملاحظة أن كل نقطة مرصودة سيكون لها زاوية رأسية بينما توجد زاوية أفقية واحدة بين كل نقطتين، كما في الشكل التالي:



شكل (١-١٢) الزوايا الأفقية والرأسية

تختلف أجهزة قياس الزوايا (مثل الثيودليت) في وضع أو تدريج الدائرة الرأسية ، فبعض الأجهزة يكون الوضع الأفقي لها عند زاوية رأسية تساوي صفر درجة بينما توجد أجهزة أخري يكون الأفق لها عند زاوية رأسية تساوي ٩٠ درجة. في الحالة الأولي فأن الزاوية الرأسية المرصودة تسمي زاوية الارتفاع Elevation Angle بينما في الحالة الثانية فأن الزاوية الرأسية المرصودة زاوية السمت Zenith Angle. يجب معرفة نوع الزاوية الرأسية لجهاز الثيودليت المستخدم لأن حسابات الارتفاع بين النقاط المرصودة ستعتمد علي نوع هذه الزاوية. العلاقة بين كلا نوعي الزاوية الرأسية هي:

زاوية الارتفاع + زاوية السمت = ٩٠° (١-٤٥)



شكل (١-١٣) زاوية الارتفاع و زاوية السمت

١-٧ الانحرافات و أنواعها

١-٧-١ أنواع اتجاه الشمال

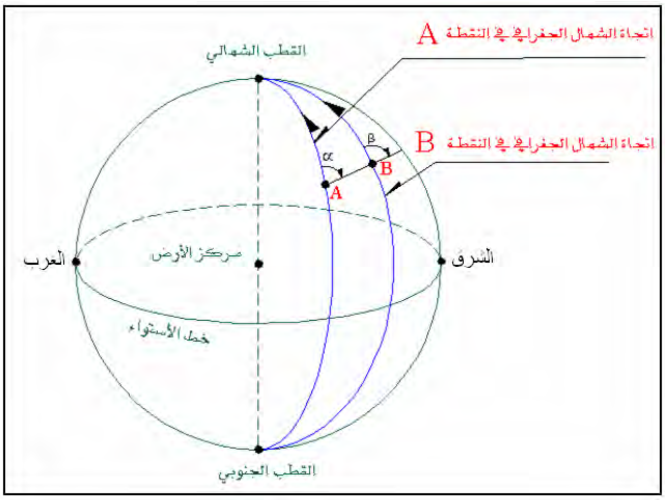
أتفق العاملون بالمساحة منذ مئات السنين علي اعتبار اتجاه الشمال هو الاتجاه المرجعي Reference Direction عند قياس الاتجاهات في الطبيعة وأيضا في الخريطة. لكن يوجد نوعين من أنواع اتجاه الشمال:

الشمال المغناطيسي Magnetic Meridian :

هو الاتجاه الذي تحدده أبره مغناطيسية حركة الحركة كاملة الاتزان وليست تحت أي تأثير مغناطيسي محلي. فإذا تركت هذه الإبرة حركة الحركة فأنها ستتجه ناحية اتجاه الشمال الذي يطلق عليه أسم الشمال المغناطيسي. وهذه هي الفكرة التي بنيت عليها أجهزة البوصلة المغناطيسية التي يمكن استخدامها في الطبيعة لتحديد اتجاه الشمال. لكن أهم مشاكل الشمال المغناطيسي أنه غير ثابت (غير متوازي عند مجموعة من النقاط) بل أنه يتغير عند نفس النقطة من عام لآخر.

الشمال الجغرافي Geographic or True Meridian:

هو الاتجاه أو الخط الواصل بين أي نقطة وكلا القطبين الشمالي و الجنوبي للأرض. الشمال الحقيقي هو اتجاه ثابت غير متغير ويتم تحديده من خلال الأرصاد و القياسات الفلكية ، وحيث أنه ثابت وغير متغير فهو المستخدم في إنشاء الخرائط.



شكل (١-١٤) اتجاه الشمال

زاوية الاختلاف Declination Angle:

يطلق أسم زاوية الاختلاف علي الزاوية المحصورة بين اتجاهي الشمال المغناطيسي و الجغرافي عند نقطة معينة في زمن معين. فإذا كان الشمال المغناطيسي شرق الشمال الجغرافي

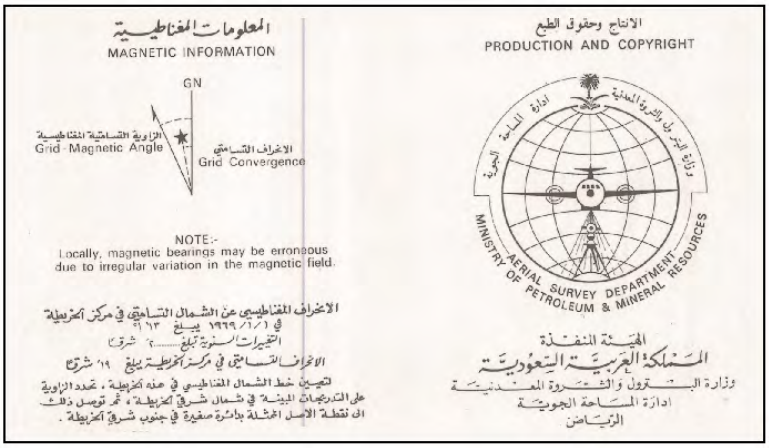
فتكون إشارة زاوية الاختلاف موجبه ، وإذا كان الشمال المغناطيسي غرب الشمال الجغرافي فتكون إشارة زاوية الاختلاف سالبة:

الانحراف الجغرافي = الانحراف المغناطيسي ± زاوية الاختلاف (١-٤٦)

حيث:

+ إن كانت زاوية الاختلاف شرقا
- إن كانت زاوية الاختلاف غربا

وغالبا توضع زاوية الاختلاف علي الخريطة لتحدد قيمتها و اتجاهها عند إنشاء الخريطة:



شكل (١-١٥) مثال لمعلومات زاوية الاختلاف علي خريطة

تتغير زاوية الاختلاف بطريقة منتظمة في عدة دورات علي مدار : (أ) تغير كل ٣٠٠ سنة تقريبا ، (ب) تغير سنوي ، (ج) تغير يومي.

<u>مثال:</u>

تم قياس الانحراف المغناطيسي لخط في عام ١٩٩٤م ووجد أنه يبلغ ٣٠' ٥٤° ووجد أن زاوية الاختلاف في عام ١٩٩٠م تبلغ ٣٠' ١٧° شرقا وتتغير سنويا بمعدل ٣' للغرب. أحسب الانحراف الحقيقي لهذا الخط؟

بما أن زاوية الاختلاف للشرق فتجمع قيمتها ، بينما تطرح قيمة التغير السنوي لأنه للغرب:

الانحراف الحقيقي = ٣٠' ٥٤° + [٣٠' ١٧° - (٣' × ٤ سنوات)]
= ٣٠' ٥٤° + [٣٠' ١٧° - ١٢']
= ٣٠' ٥٤° + [١٨' ١٧°]
= ٤٨' ٧١°

يمكن معرفة قيمة زاوية الاختلاف من خلال مواقع بعض الجهات المتخصصة علي شبكة الانترنت مثل موقع الوكالة الأمريكية للمحيطات والمناخ المعروفة باسم NOAA في الرابط التالي:

http://www.ngdc.noaa.gov/geomagmodels/Declination.jsp

القيم التالية تمثل زوايا الاختلاف لبعض المواقع في يوم ١/١/ ٢٠١٢ م:

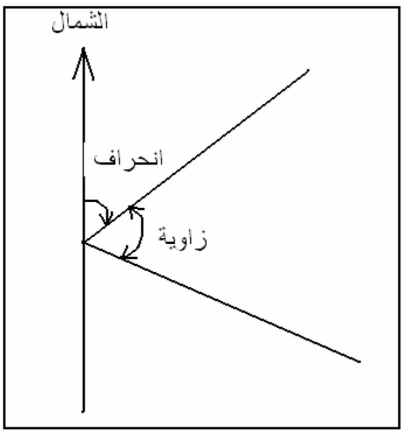
المدينة	الموقع الجغرافي التقريبي		زاوية الاختلاف
	خط الطول	دائرة العرض	
مكة المكرمة	٣٩.٨٢٥° شرقا	٢١.٤٢٦° شمالا	١٥° ٠٢' غربا
المدينة المنورة	٣٩.٦١١° شرقا	٢٤.٤٥٦° شمالا	١٤° ٢٩' غربا
القاهرة	٣١.٢٢٩° شرقا	٣٠.٠٥٨° شمالا	١١° ١٥' غربا

<u>الشمال الاختياري أو المفروض Arbitrary or Assumed Meridian:</u>

في حالة عدم معرفة الراصد في الطبيعة لأيا من اتجاهي الشمال المغناطيسي أو الجغرافي فأنه يقوم بافتراض اتجاه شمال لكي يبدأ منه أعمال القياس المساحي (غالبا يكون اتجاه أحد خطوط العمل المساحي) كاتجاه مرجعي مفروض لهذا العمل. ولاحقا قد يتمكن الراصد من معرفة العلاقة بين هذا الشمال الاختياري والشمال الحقيقي ومن ثم يقوم بتصحيح قياساته لينسبها إلي اتجاه الشمال الحقيقي.

١-٧-٢ أنواع الانحرافات

يطلق مصطلح "الزاوية" علي الزاوية المقاسة بين خطين ، بينما يطلق مصطلح "الانحراف Bearing or Azimuth" علي الزاوية المقاسة بدءا من اتجاه الشمال إلي الخط المطلوب. فان كان الاتجاه المرجعي (لبدء القياس) هو الشمال المغناطيسي فنحصل علي الانحراف المغناطيسي ، بينما إن كان الاتجاه المرجعي (لبدء القياس) هو الشمال الجغرافي فنحصل علي الانحراف الجغرافي أو الحقيقي.

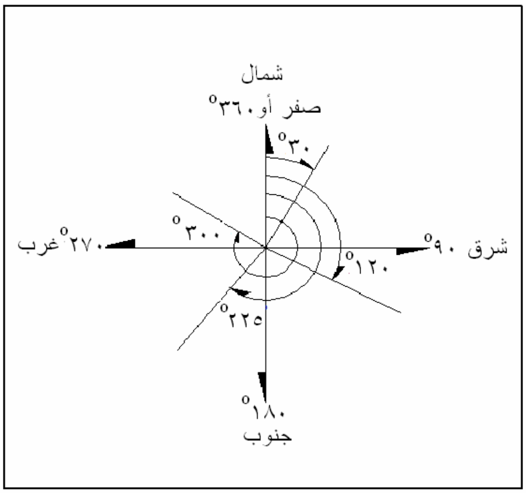


شكل (١-١٦) الزاوية و الانحراف

يوجد نوعين من أنواع الانحرافات المستخدمة في المساحة: الانحراف الدائري و الانحراف المختصر.

الانحراف الدائري Azimuth:

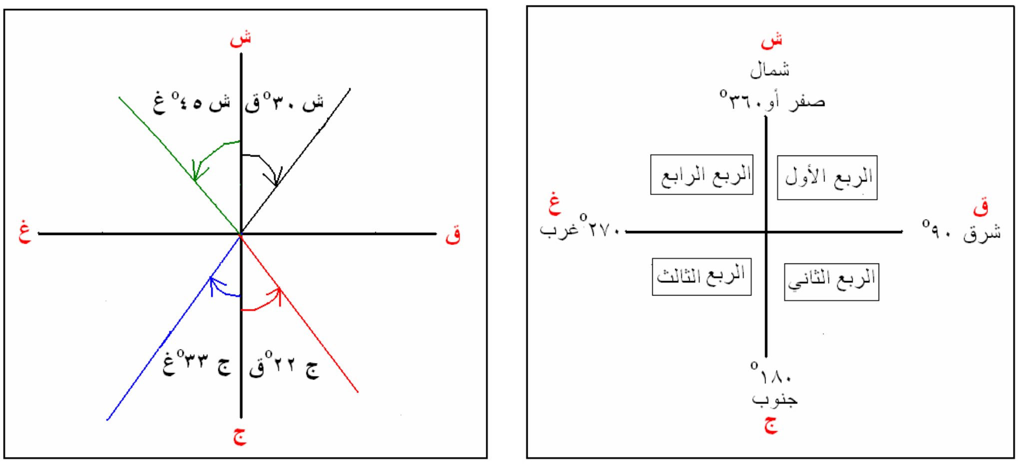
هو الزاوية المقاسة (١) بدءا من اتجاه الشمال (٢) وباتجاه دوران عقرب الساعة ، وتتراوح قيمته بين الصفر و ٣٦٠ درجة ستينية.



شكل (١-١٧) الانحراف الدائري

الانحراف المختصر Bearing:

هو الزاوية المقاسة (١) بدءا من اتجاه الشمال (٢) أو اتجاه الجنوب (٣) وباتجاه دوران عقرب الساعة (٤) أو ضد اتجاه دوران عقرب الساعة، وتتراوح قيمته بين الصفر و ٩٠ درجة ستينية فقط. ولذلك فلا بد من ذكر ربع الدائرة الواقع به الانحراف المختصر.

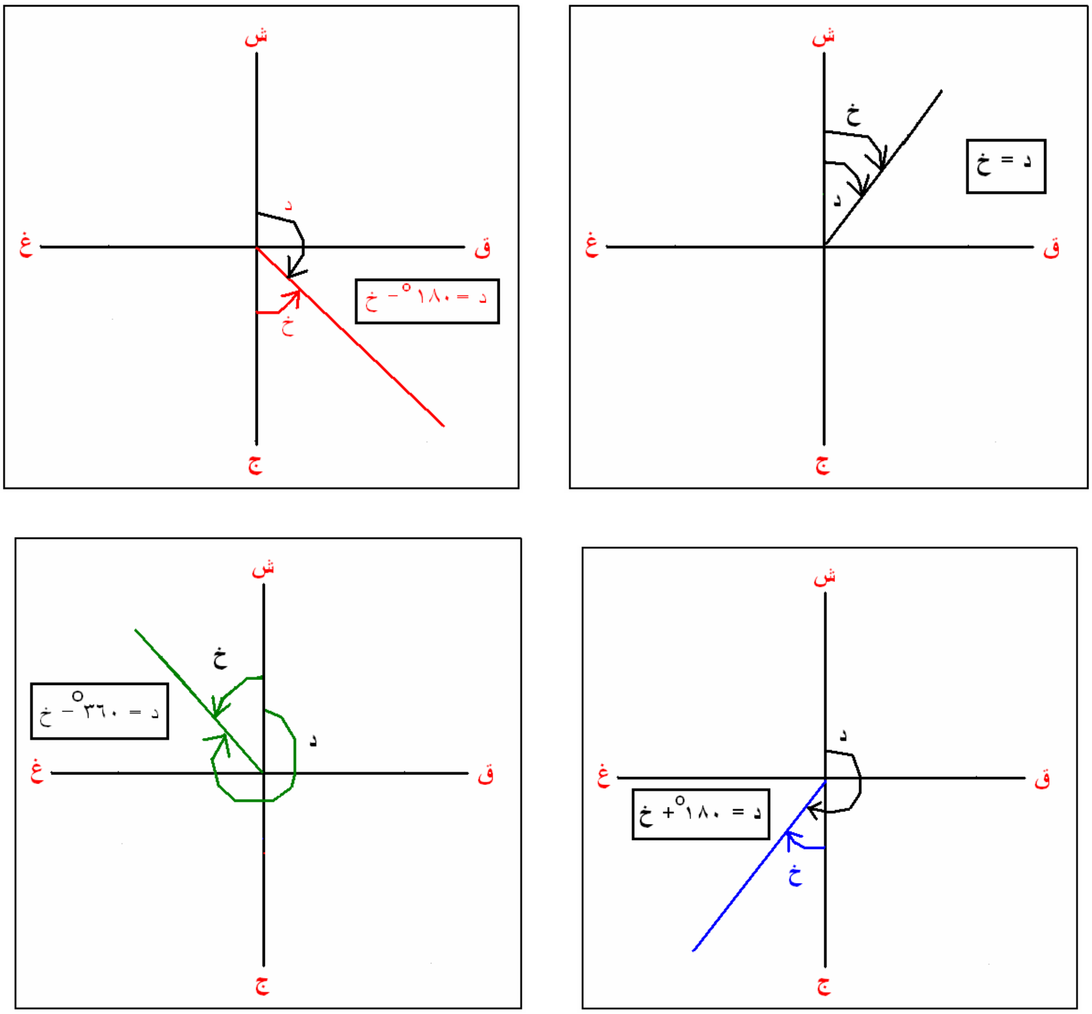


شكل (١-١٨) الانحراف المختصر

التحويل بين الانحراف الدائرى و الانحراف المختصر:

طبقا للربع الواقع به الانحراف المختصر فيمكن استنباط المعادلات الأربعة التالية للتحويل بين الانحراف الدائري (د) والانحراف المختصر (خ) كما في الشكل التالي:

الربع	المعادلة	
الأول	د = خ	(١-٤٧)
الثاني	د = ١٨٠° ــ خ	(١-٤٨)
الثالث	د = ١٨٠° + خ	(١-٤٩)
الرابع	د = ٣٦٠° ــ خ	(١-٥٠)



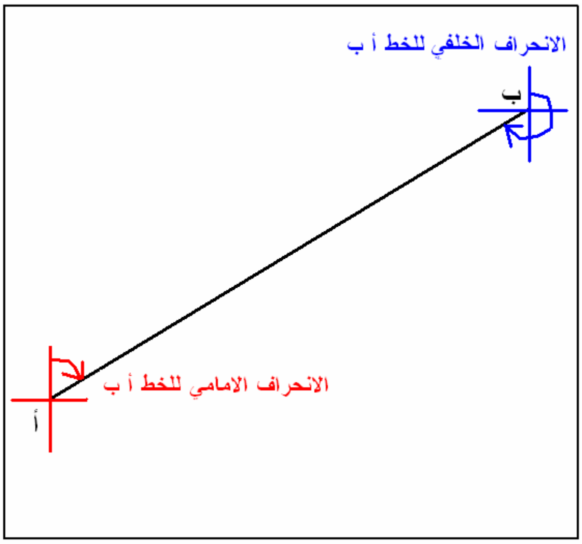
شكل (١-١٩) التحويل بين الانحراف الدائري و المختصر

الجدول التالي يوضح بعض الأمثلة للتحويل بين كلا نوعي الانحراف:

الانحراف الدائري	الانحراف المختصر
٤٩" ٠٣' ٠١٤°	ش ٤٩" ٠٣' ٠١٤° ق
٤٢" ٣٦' ١٣٠°	ج ١٨" ٢٣' ٠٤٩° ق
٥٣" ٤٤' ٢١٨°	ج ٥٣" ٤٤' ٠٣٨° غ
٥٨" ١٧' ٢٩٤°	ش ٠٢" ٤٢' ٠٦٥° غ

١-٧-٣ الانحراف الأمامي و الانحراف الخلفي لخط

يتكون أي خط من نقطتي البداية و النهاية ، ولذلك فيكون له انحرافين: الانحراف الأمامي وهو الانحراف المقاس عند بداية الخط ، والانحراف الخلفي وهو الانحراف المقاس عند نهاية الخط.



شكل (١-٢٠) الانحراف الأمامي و الخلفي

والعلاقة بينهما هي:

الانحراف الخلفي = الانحراف الأمامي ± ١٨٠° (١-٥١)

حيث:

+ عندما يكون الانحراف المعلوم منهما أقل من ١٨٠°

- عندما يكون الانحراف المعلوم منهما أكبر من ١٨٠°

مثال ١:

أوجد الانحراف الخلفي للخط أ ب الذي يبلغ انحرافه الأمامي ٤٢" ٣٦' ١٣٠° ؟

حيث أن الانحراف المعلوم أقل من ١٨٠° فأن:

الانحراف الخلفي = الانحراف الأمامي + ١٨٠°
= ٤٢" ٣٦' ١٣٠° + ١٨٠°
= ٤٢" ٣٦' ٣١٠°

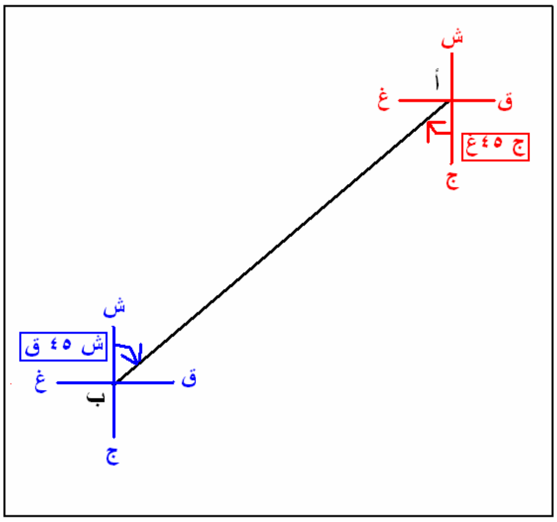
<u>مثال ٢:</u>

أوجد الانحراف الخلفي للخط أ ب الذي يبلغ انحرافه الأمامي المختصر ج ٤٥° غ ؟

الانحراف الأمامي المختصر ج ٤٥° غ يقع في الربع الرابع : إذن:
الانحراف الأمامي الدائري للخط أ ب = ٣٦٠° – خ
= ٣٦٠° - ٤٥° = ٣١٥°
حيث أن الانحراف المعلوم أكبر من ١٨٠° فأن:
الانحراف الخلفي = الانحراف الأمامي - ١٨٠°
= ٣١٥° - ١٨٠° = ١٣٥°

وحيث أن هذا الانحراف الخلفي الدائري يقع في الربع الثاني فأن الانحراف الخلفي المختصر له:
خ = ١٨٠° – د
= ١٨٠° – ١٣٥° = ش ٤٥° ق

إذن الانحراف الخلفي المختصر للخط أ ب (ش ٤٥° ق) يمكن الحصول عليه مباشرة من الانحراف الأمامي المختصر لهذا الخط (ج ٤٥° غ) بمجرد عكس إشارات الربع وبدون أية حسابات حيث تظل قيمة الزاوية كما هي:



الفصل الثاني

الأخطاء في القياسات

٢-١ مقدمة

يعتمد علم المساحة في المقام الأول علي الأرصاد (القياسات) والتي مهما بلغت دقة قياسها فلن تعطي نتائج صحيحة بصورة مطلقة بل سيكون بها خطأ مهما كان صغيرا جدا. فعلي سبيل المثال إذا قام راصد ذو خبرة كبيرة مستخدما جهاز ثيودليت دقيق بقياس زاوية ما عدد من المرات فلن تكون قيمة الزاوية واحدة في كل هذه القياسات. لذلك من الضروري علي دارس المساحة أن يلم بمصادر الأخطاء و أنواعها و كيفية التغلب عليها – إن أمكن – أو كيفية التعامل معها حسابيا للوصول إلي قيمة أقرب للصحة للكمية (مسافة أو زاوية أو فرق منسوب ...الخ) التي يتم قياسها.

٢-٢ أنواع الأخطاء

الخطأ هو مقدار الفرق بين القيمة المقاسة (المرصودة) والقيمة الحقيقية لها. لكن من الصعب – إن لم يكن من المستحيل – أن نعرف القيمة الحقيقية لأي قياس، ولذلك فنستعيض عنه بالقيمة الأكثر احتمالا له.

تحدث الأخطاء نتيجة ثلاثة أسباب أو مصادر هي:

(أ) أخطاء إلية:

أخطاء ناتجة عن عيوب الأجهزة المستخدمة في القياس والتي يمكن التغلب عليها من خلال ضبط الجهاز ضبط دائم و معايرته كل فترة و إتباع خطة معينة في الرصد (مثل الرصد متيامن و متياسر بجهاز الثيودليت) وتصحيح أو ضبط الأرصاد من خلال معادلات رياضية (مثلا ضبط زوايا المثلث بحيث يساوي مجموع زواياه ١٨٠ درجة).

(ب) أخطاء شخصية:

أخطاء ترجع للراصد ذاته مثل عدم اعتنائه بعملية الرصد بصورة سليمة أو قلة خبرته العملية.

(ج) أخطاء طبيعية:

أخطاء ترجع أسبابها لتغير الظروف الطبيعية أثناء عملية الرصد مثل تغير تأثير الانكسار الجوي علي الميزان في فترات اليوم الواحد.

تنقسم أنواع الأخطاء إلي أربعة أنواع تشمل:

(١) الغلط أو الخطأ الجسيم Mistake or Blunder or Gross Error:

هو قيمة شاذة تجعل القيم المرصودة غير متجانسة مع بقية الأرصاد المماثلة، وينتج عن قلة الخبرة أو الإهمال في القياس. مثلا عند قياس زاوية عدة مرات فتكتب قيمتها في احدي المرات ١٥٣ درجة بدلا من ١٣٥ درجة، أو التوجيه علي نقطة "أ" وتسجيل قراءة الزاوية علي أنها لنقطة "ب". فإذا تم قياس مسافة عدة مرات كالتالي: ٥٦.٣٢، ٥٦.٣٨، ٥٦.٤٠، ٥٧.٣٨، ٥٦.٣٥، ٥٦.٣٩ متر، فيمكن بالملاحظة اكتشاف أن القيمة ٥٧.٣٨ تعد غلط أو خطأ جسيم حيث أن باقي القيم متقاربة مع بعضها في حدود سنتيمترات بينما هذه القيمة تبعد عنهم بمتر كامل تقريبا. يمكن اكتشاف الغلط من خلال الحرص في المراجعة والتحقق من كل خطوة من خطوات الرصد ثم استبعاده نهائيا من عملية الحسابات المساحية. تجدر الإشارة إلي أن الغلط هو أخطر أنواع الأخطاء وأشدها تأثيرا علي دقة العمل في حالة عدم اكتشافه.

(٢) الخطأ التراكمي Accumulative Error:

هو خطأ صغير القيمة نسبيا (عند مقارنته بقيمة الغلط) يتكرر بنفس المقدار و الإشارة إذا تكرر القياس تحت نفس الظروف وباستخدام نفس الأجهزة ونفس الراصدين. الخطأ المنتظم خطا تراكمي بمعني أن قيمته تزيد كلما تكرر القياس، فمثلا إذا كان هناك خطأ ١٠ سنتيمتر في شريط طوله ٢٠ متر واستخدمنا هذا الشريط في قياس مسافة تبلغ ١٠٠ متر فأن خطا منتظم قيمته ١٠ سنتيمتر سيكون في كل طرحة (رصده أو جزء من المسافة، أي في كل ٢٠ متر مقاسه) مما سيجعل الخطأ المنتظم سيبلغ ١٠ سنتيمتر × ٥ مرات قياس = ٥٠ سنتيمتر في نهاية هذه المسافة. يتم التغلب علي الخطأ المنتظم إما بإضافة التصحيحات اللازمة له أو بوضع خطة دقيقة لعملية الرصد ذاتها، ويجب أن يتم ذلك قبل استخدام الأرصاد في العمليات الحسابية المساحية.

(٣) الخطأ المنتظم Systematic Error:

يشبه الخطأ المنتظم الخطأ التراكمي في طبيعته إلا أنه قد يكون تراكميا بنفس المقدار والإشارة وقد يختلف في قيمته و إشارته من أجزاء العمل الحقلي. كمثال تأثير عوامل الطقس (الحرارة والرطوبة) علي قياسات الزوايا و المسافات المقاسة الكترونيا سواء بأجهزة EDM أو المحطات الشاملة، ولذلك توجد معادلات رياضية لحساب قيمة هذا الخطأ المنتظم بناءا علي قيم درجات الحرارة و الرطوبة المقاسة أثناء عملية الرصد الميداني. يتم التغلب علي الأخطاء المنتظمة من خلال إجراء التصحيحات اللازمة أو بوضع خطة دقيقة لعملية الرصد واختيار أنسب ظروف القياس. أيضا يجب أن يتم التغلب علي الأخطاء المنتظمة و تصحيحها (مثل الأخطاء التراكمية) قبل استخدام الأرصاد في العمليات الحسابية المساحية.

(٤) الخطأ العشوائي أو العارض Random or Accidental Error:

الخطأ العشوائي خطأ متغير غير ثابت لا في القيمة ولا في الإشارة ولا يمكن التنبؤ به ولا معرفة مصدره الرئيسي، ولذلك فأسمه العشوائي. توجد الأخطاء العشوائية - مهما صغرت قيمتها - في كل القياسات ويتم التعامل معها بطرق رياضية لمحاولة الوصول إلي القيمة الأكثر

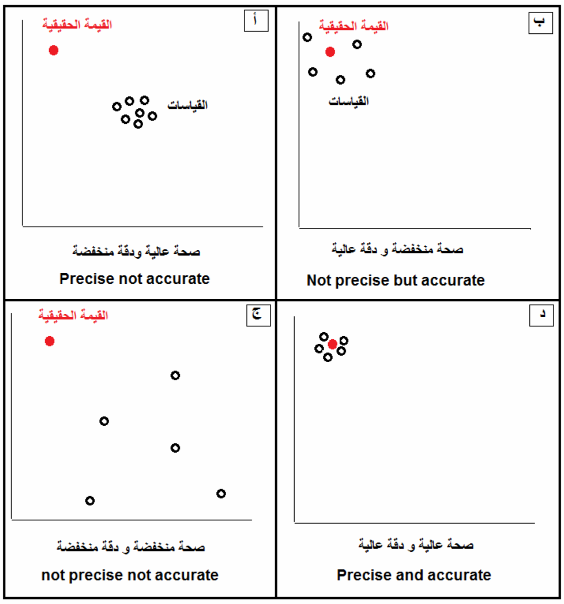
احتمالا للكميات المطلوب حساب قيمتها الدقيقة. وهذا هو موضوع نظرية الأخطاء Theory of Errors أو عملية الضبط Adjustment.

٢-٣ الدقة و الصحة

يجب علي دارس المساحة أن يفرق بين كلا المفهومين وخاصة – للأسف – أن بعض الكتب باللغة العربية تترجم كلا الكلمتين إلي "دقة" مع أنه يوجد اختلاف جذري بينهما. فالصحة (البعض يسميها الإحكام أو الدقة الظاهرية) Precision تدل علي مدي تقارب مجموعة من القياسات لنفس الهدف، أي أن الصحة هي درجة التوافق بين عدة قياسات لقيمة واحدة، أو هي درجة تنقية الأرصاد من الأخطاء معروفة المصدر وإزالة تأثيرها علي القياسات. بينما الدقة Accuracy تدل علي مدي قرب هذه الأرصاد من القيمة الحقيقية لها، أو بمعني آخر فالدقة هي درجة الكمال في الأرصاد وخلوها من الأخطاء بقدر الإمكان.

لنأخذ مثالا: تم قياس مسافة عدد من المرات فكانت النتائج ٨.٢٤ ، ٨.٢٦ ، ٨.٢٠ ، ٨.٢٢ متر. هذه الأرصاد متقاربة جدا من بعضها مما يجعلنا نقول أن "صحة" الأرصاد عالية. لكن ماذا لو كان الشريط المستخدم في هذه الأرصاد به خطأ منتظم قيمته ٢٠ سنتيمتر مثلا، هنا ستكون كل القياسات بعيدة عن القيمة الحقيقية للمسافة المقاسة ، أي أنها "دقة" الأرصاد ستكون منخفضة.

الشكل التالي يمثل أربعة حالات للفرق بين الدقة و الصحة: (أ) فان كانت القياسات متقاربة جدا من بعضها البعض لكنها في نفس الوقت بعيدة عن القيمة الحقيقية فهنا تكون الصحة عالية لكن الدقة منخفضة، (ب) أما إن كانت القياسات متباعدة عن بعضها البعض لكنها في نفس الوقت قريبة من القيمة الحقيقية فهنا تكون الصحة منخفضة لكن الدقة عالية، (ج) أما إن كانت القياسات متباعدة عن بعضها البعض وأيضا بعيدة عن القيمة الحقيقية فهنا تكون الصحة منخفضة والدقة منخفضة أيضا، (د) أما إن كانت القياسات متقاربة جدا من بعضها البعض وفي نفس الوقت قريبة من القيمة الحقيقية فهنا تكون الصحة عالية والدقة عالية أيضا.



شكل (٢-١١) الدقة و الصحة

من الصعب معرفة القيمة الحقيقية لأي قيمة مقاسة لتحديد دقة القياسات، وغالبا نستطيع حساب قيمة هي الأكثر احتمالا أو الأكثر قربا للقيمة الحقيقية. مثلا إذا قممنا بقياس زاوية عدة مرات – وتأكدنا من عدم وجود أية أغلاط أو أخطاء منتظمة أو أخطاء تراكمية – ثم قمنا بحساب متوسط هذه الأرصاد فأنه سيكون أقرب وأكثر احتمالا للقيمة الحقيقية لهذه الزاوية. لكي نحدد مقياس للدقة يتم مقارنة القيمة الأكثر احتمالا (المتوسط) بقيمة المسافة التي تم قياسها بطريقة أدق، فمثلا نقارن متوسط المسافات المقاسة بالشريط مع قيمة المسافة المقاسة بالمحطة الشاملة ونقارن متوسط الزاوية المقاسة بالثيودليت مع قيمة الزاوية المحسوبة من أرصاد النظام العالمي لتحديد المواقع GPS، ونقارن إحداثيات GPS مع إحداثيات تقنية أخري أكثر تقدما ودقة مثل Accurate .VBLI

٢-٤ المتوسطات

يمكن تقسيم الأرصاد المساحية إلي مجموعتين:

(١) أرصاد مباشرة Direct Observations:

عند قياس الكمية المطلوبة قياسا مباشرا فمثلا قياس المسافة مباشرة وكذلك قياس الزوايا المطلوبة ... الخ. تسمي هذه الكميات في هذه الحالة كميات مستقلة Independent Observations أي لا تعتمد علي أية أرصاد أو كميات أخري.

(٢) أرصاد غير مباشرة Indirect Observations:

هي الكميات التي لا يمكن قياسها مباشرة لكن يتم عمل أرصاد لكميات أخري والتي منها سيتم تحديد أو حساب قيم الكميات الأصلية المطلوبة. فمثلا قياس طول وعرض مربع بهدف حساب مساحته، وعند حساب إحداثيات نقاط ترافرس فنقيس زوايا و أضلاع الترافرس والتي هنا تمثل أرصاد غير مباشرة. وتسمي الأرصاد غير المباشرة كميات تابعة Dependant Observations لأنها تعتمد في تحديد قيمتها علي قيم أرصاد أخري تتأثر بها.

القيمة الأكثر احتمالا Most-Probable Value:

من الصعب – إن لم يكن من المستحيل – معرفة القيمة الحقيقية لأي كمية مقاسة وذلك لوجود أخطاء في القياس مهما كانت قيمة هذه الأخطاء صغيرة جدا. إن كانت الأرصاد مستقلة ولا تعتمد علي بعضها البعض وقمنا بتكرار القياس عدة مرات فأن قيمة المتوسط الحسابي ستمثل القيمة الأكثر احتمالا أو الأكثر توقعا أو الأكثر قربا للقيمة الحقيقية.

المتوسط الحسابي = مجموع الأرصاد / عدد الأرصاد (٢-١)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad (2\text{-}1)$$

حيث:

y_i تمثل الأرصاد $y_1, y_2, y_3, \ldots.. y_n$
n تمثل عدد الأرصاد

الخطأ الحقيقي True Error:

هو الفرق بين القيمة المرصودة والقيمة الحقيقية لها. وبما أن القيمة الحقيقية لا يمكن معرفتها ففي معظم الأحيان فان الخطأ الحقيقية أيضا لا يمكن معرفته. لكن في بعض الحالات يمكن معرفة الخطأ الحقيقي من خلال مواصفات أو قواعد هندسية معلومة فمثلا عند قياس الزوايا الثلاثة لمثلث فيجب أن يساوي مجموع الزوايا ١٨٠ درجة، ففي هذه الحالة يكون الخطأ الحقيقي هو ناتج طرح مجموع الزوايا المقاسة من ١٨٠.

الخطأ الحقيقي = القيمة المرصودة – القيمة الحقيقية (٢-٢)

$$\varepsilon_i = y_i - \mu \qquad (2\text{-}2)$$

حيث:

μ القيمة الحقيقية
ε الخطأ الحقيقي

الأخطاء المتبقية أو الفروق Residuals or Discrepancies:

الفرق أو الخطأ المتبقي (أو الباقي) هو الفرق بين القيمة المرصودة و القيمة الحقيقية لها. لكننا نستعيض عن القيمة الحقيقية بالقيمة الأكثر احتمالا لها وبذلك يكون الخطأ المتبقي:

الفرق = القيمة الأكثر احتمالا – القيمة المرصودة (٢-٣)

$$v_i = \bar{y} - y_i \qquad (2\text{-}3)$$

حيث:

v الخطأ المتبقي أو الفرق

٢-٥ التشتت و الانتشار

التباين Variance:

التباين هو مؤشر إحصائي يحدد مدي تباين أو انتشار أو تشتت مجموعة من الأرصاد حول القيمة الحقيقية لها أو القيمة الأكثر احتمالا لها، ولذلك يوجد نوعين من التباين:

تباين المجتمع Population Variance:

إذا تم قياس **كل** الأرصاد الممكنة للقيمة المطلوبة فأن تباين المجتمع يساوي مجموع مربعات الأخطاء **الحقيقية** مقسوما علي عدد الأرصاد:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n} \qquad (2\text{-}4)$$

حيث ε الخطأ الحقيقي لكل رصده (وهو كما ذكرنا غير معلوم بسبب أن القيمة الحقيقية غالبا غير معلومة).

تباين العينة Sample Variance:

إذا تم قياس **عينة** أو مجموعة من الأرصاد للقيمة المطلوبة فأن تباين هذه العينة يساوي مجموع مربعات الأخطاء **المتبقية** (وليست الأخطاء الحقيقية) مقسوما علي عدد الأرصاد ناقص واحد:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1} \qquad (2\text{-}5)$$

حيث: v الخطأ المتبقي أو الفرق لكل رصده.

أي أننا في حسابات المساحة نتعامل مع تباين العينة وليس تباين المجتمع وذلك بسبب حساب تباين المجتمع يتطلب معرفة القيمة الحقيقية وهي غير معلومة وبالتالي لا يمكننا معرفة قيم الأخطاء الحقيقية (في المعادلة ٢-٤) وذلك بالإضافة إلي أننا لا نستطيع قياس كل الأرصاد الممكنة للقيمة المطلوب قياسها.

الخطأ المعياري Standard Error:

الخطأ المعياري هو الجذر التربيعي لقيمة تباين المجتمع.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}} \qquad (2\text{-}6)$$

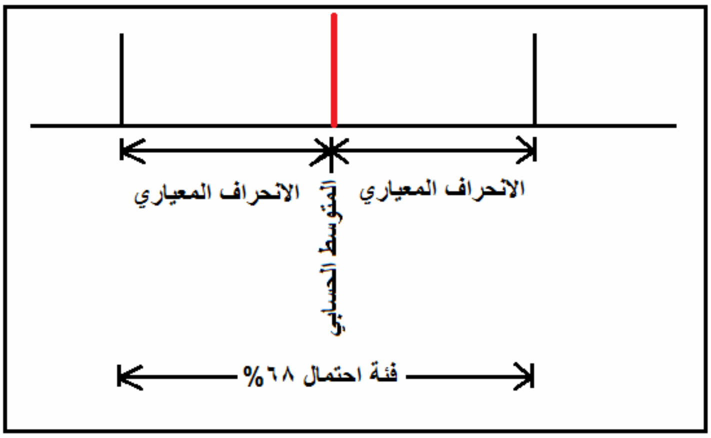
الانحراف المعياري Standard Deviation:

يعبر الانحراف المعياري (يطلق عليه أيضا أسم الخطأ التربيعي المتوسط Mean Square Error) عن مدي انحراف (ابتعاد أو اقتراب) القيمة المقاسة عن القيمة الأكثر احتمالا لها، وقيمته تساوي الجذر التربيعي لقيمة تباين العينة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \qquad (2\text{-}7)$$

ترجع أهمية قيمة الانحراف المعياري إلي وجود احتمال بنسبة ٦٨% أن القيمة الحقيقية ستقع في مدي يتراوح بين (المتوسط + الانحراف المعياري) و (المتوسط - الانحراف المعياري).
مثال: إذا كان متوسط عدد من القياسات لمسافة يساوي ٥٣.٢١ متر وكان الانحراف المعياري للقياسات يساوي ± ٠.٠٣ متر فأن القيمة الحقيقية لهذه المسافة ستقع باحتمال ٦٨% بين ٥٣.٢١+٠.٠٣ و ٥٣.٢١-٠.٠٣ أي بين ٥٣.٢٤ و ٥٣.١٩ متر. بمعني آخر يمكن القول أن ٦٨% من القياسات أو الأرصاد يحتمل أن يكون بها خطأ قيمته تساوي قيمة الانحراف المعياري سواء بإشارة موجبة أو سالبة.

كلما صغرت قيمة الانحراف المعياري صغرت حدود هذه الفئة مما يدل علي أن القياسات أقرب ما تكون للقيمة الحقيقية، والعكس صحيح فكلما كبرت قيمة الانحراف المعياري زادت حدود الفئة مما يعطي انطباعا أن القياسات أو الأرصاد بعيدة عن القيمة الحقيقية.



شكل (٢-٢) العلاقة بين المتوسط و الانحراف المعياري

أيضا يجب ملاحظة أن الانحراف المعياري يعتمد علي عدد الأرصاد (n في المعادلة ٢-٧)، أي أن كلما زاد عدد الأرصاد أو القياسات كلما زاد اقتراب هذه القياسات من القيمة الحقيقية لها وبالتالي تزداد الثقة في القياسات. وهذا من أهم مبادئ العمل المساحي بصفة عامة حيث دائما نفضل أن نقيس الكمية عدد من المرات ولا نكتفي بقياسها مرة واحدة فقط.

الانحراف المعياري للمتوسط Standard Deviation of the Mean:

الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي هو حاصل قسمة الانحراف المعياري للعينة علي الجذر التربيعي لعدد الأرصاد:

$$S_{\bar{y}} = \pm \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (2\text{-}8)$$

تعبر قيمة الانحراف المعياري عن مدي تشتت أو تباعد القياسات عن بعضها البعض وبالتالي فهي قيمة معبرة عن مدي التوافق بين الأرصاد ومن ثم فأن الانحراف المعياري يؤخذ علي أنه مقياس أو مؤشر للصحة Precision. وفي العمل المساحي لا نعبر عن القيمة الأكثر احتمالا

بقيمة المتوسط فقط إنما بقيمتي المتوسط و الانحراف المعياري معا، فنقول أن المسافة المقاسة – علي سبيل المثال – تساوي ٥٣.٢١ ± ٠.٠٣ متر.

بالعودة لتعريف كلا من الصحة و الدقة نستطيع القول أن الانحراف المعياري (الذي هو أساسا مؤشر للصحة Precision) يمكنه أن يعبر عن الدقة Precision في حالة خلو الأرصاد بقدر الإمكان من الأخطاء المنتظمة والأخطاء التراكمية والأغلاط. ففي حالة خلو الأرصاد من مصادر الأخطاء المعروفة فأن القياسات لن يكون بها إلا الأخطاء العشوائية فقط وبالتالي ستقترب قيم الأخطاء المتبقية أو الفروق من قيم الأخطاء الحقيقية وستقترب القيمة الأكثر احتمالا من القيمة الحقيقية للكمية المقاسة، ومن هنا فأن قيمة الانحراف المعياري ستقترب من قيمة الخطأ الحقيقي مما يجعل الانحراف المعياري يعبر - بدرجة كبيرة - عن الدقة. هنا تأتي أهم مبادئ العمل المساحي وهو أنه يحاول تحقيق أعلي درجة من الدقة في الرصد الحقلي سواء دقة الأجهزة المستخدمة أو دقة أساليب الرصد الميداني واتخاذ كافة الاحتياطات و تطبيق مواصفات الرصد وزيادة عدد الأرصاد مما يجعل الأرصاد المساحية خالية بقدر الإمكان من الأخطاء معلومة المصدر وبذلك فتكون نتائج الحسابات المساحية معبرة عن دقة الكميات المطلوب تحديدها.

<u>مثال ١:</u>

قيست مسافة ستة مرات فكانت الأرصاد كالتالي: ٥١.١٢، ٥١.١٤، ٥١.١٨، ٥١.١٩، ٥١.٢٢، ٥١.١٦ متر. أحسب القيمة الأكثر احتمالا لهذه المسافة.

مجموع المسافات المقاسة = ٥١.١٢ + ٥١.١٤ + ٥١.١٨ + ٥١.١٩ + ٥١.٢٢ + ٥١.١٦
= ٣٠٧.٠١ متر

المتوسط الحسابي = مجموع المسافات ÷ عددهم = ٣٠٧.٠١ ÷ ٦ = ٥١.١٦٨ متر

نحسب الخطأ المتبقي لكل قياس = المتوسط - الرصدة
الخطأ المتبقي للرصدة رقم ١ = ٥١.١٦٨ – ٥١.١٢ = ٠.٠٤٨ متر
الخطأ المتبقي للرصدة رقم ٢ = ٥١.١٦٨ – ٥١.١٤ = ٠.٠٢٨ متر
وهكذا كما في العمود الثالث من الجدول التالي.

نحسب مربع كل خطأ متبقي للقياسات:
مربع الخطأ المتبقي للرصدة رقم ١ = ٠.٠٤٨ × ٠.٠٤٨ = ٠.٠٠٢٣٣٦ متر مربع
مربع الخطأ المتبقي للرصدة رقم ٢ = ٠.٠٢٨ × ٠.٠٢٨ = ٠.٠٠٠٨٠٣ متر مربع
وهكذا كما في العمود الرابع من الجدول التالي.

نحسب مجموع مربعات الأخطاء المتبقية = ٠.٠٠٦٤٨٣ متر مربع

نحسب تباين العينة (المعادلة ١٢-٥) = ٠.٠٠٦٤٨٣ ÷ (٦-١))
= ٠.٠٠١٢٩٦٧ متر مربع

نحسب الانحراف المعياري (المعادلة ١٢-٧) = جذر (٠.٠٠١٢٩٦٧)
= ٠.٠٣٦ متر.

م	القياسات Y	الفروق v	مربع الفروق v2
1	51.12	0.048	0.002336
2	51.14	0.028	0.000803
3	51.18	-0.012	0.000136
4	51.19	-0.022	0.000469
5	51.22	-0.052	0.002669
6	51.16	0.008	0.000069

العدد	6		
المجموع	307.010		0.006483
المتوسط	51.168		

تباين المجتمع			0.0012967
الانحراف المعياري			0.036
الانحراف المعياري للمتوسط			0.015

القيمة الأكثر احتمالا = المتوسط ± الانحراف المعياري
= ٥١.١٦٨ ± ٠.٠١٥ متر.

٢-٦ الوزن

في المثال السابق قمنا بحساب المتوسط و الانحراف المعياري للمسافة التي تم قياسها عدد من المرات لكننا افترضنا أن كل القياسات متساوية في الدقة و الأهمية. ماذا لو كانت بعض القياسات قد تمت باستخدام الشريط بينما القياسات الأخرى تمت باستخدام جهاز EDM؟ هل ستكون كل القياسات متساوية في الأهمية ومقدار الثقة بها؟ هنا يأتي دور الوزن weight ليكون مفهوما يعبر عن مدي اختلاف أهمية أو الثقة في بعض القياسات. فكلما كانت الثقة في الرصدة كبيرة فيكون وزنها (أهميتها النسبية) كبيرا والعكس صحيح فكلما كانت الثقة ضعيفة في رصده معينة فيجب أن يكون وزنها أقل. فعلي سبيل المثال إذا قمنا برصد زاوية معينة مرة باستخدام محطة شاملة دقتها ١" ومرة أخري باستخدام جهاز ثيودليت دقته ٥" فأن وزن الزاوية الأولي يجب أن يكون – منطقيا- أكبر من وزن الزاوية الثانية حيث أن دقة الجهاز المستخدم أعلي في الأولي من الثانية.

وبناءا علي مبدأ الوزن (أو الأهمية النسبية) فأن طريقة حساب المتوسط ستتغير لنحسب ما نطلق عليه أسم المتوسط الموزون Weighted Mean (لنفرق بينه وبين المتوسط العادي في المعادلة ٢-١ والذي كان يعتمد علي أن كل القياسات متساوية في الأهمية أو متساوية في الوزن):

المتوسط الموزون = مجموع (حاصل ضرب كل رصده× وزنها) / مجموع الأوزان

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \, w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad (2\text{-}9)$$

كما ستتغير أيضا طريقة حساب الانحراف المعياري عند وجود أوزان مختلفة للقياسات (بدلا من المعادلة ٢-٧) وذلك بحساب الجذر التربيعي لقيمة الناتج من قسمة مجموع حاصل ضرب (مربع الخطأ المتبقي لكل رصده في وزن الرصدة) علي عدد الأرصاد ناقص واحد:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \, w_i}{n-1}} \qquad (2\text{-}10)$$

كذلك ستتغير معادلة حساب الانحراف المعياري للمتوسط (٢-٨) لتصبح ناتج قسمة الانحراف المعياري علي الجذر التربيعي لمجموع الأوزان:

$$S_{\bar{y}} = \pm \frac{S}{\sqrt{w}} \qquad (2\text{-}11)$$

مثال ٢:

قيست مسافة ستة مرات فكانت الأرصاد كالتالي: ٥١.١٢، ٥١.١٤، ٥١.١٨، ٥١.١٩، ٥١.٢٢، ٥١.١٦ متر، وكانت أوزان الأرصاد بالترتيب هي ٦، ٥، ٣ ، ١، ١، ٣. أحسب القيمة الأكثر احتمالا لهذه المسافة.

نحسب مجموع الأوزان = ٦ + ٥ + ٣ + ١ + ١ + ٣ = ١٩

نحسب حاصل ضرب الرصدة × وزنها:
للرصدة رقم ١ = ٥١.١٢ × ٦ = ٣٠٦.٧٢٠
للرصدة رقم ٢ = ٥١.١٤ × ٥ = ٢٥٥.٧٠٠
وهكذا كما في العمود الرابع من الجدول التالي.

مجموع (الرصدة×الوزن) أي مجموع العمود الرابع = ٩٧١.٨٥٠

من المعادلة ٢-٩:
المتوسط الحسابي الموزون = مجموع (الرصدة×الوزن) ÷ مجموع الأوزان
= ٩٧١.٨٥٠ ÷ ١٩ = ٥١.١٥٠ متر

نحسب الخطأ المتبقي لكل قياس = المتوسط الموزون - الرصدة
الخطأ المتبقي للرصدة رقم ١ = ٥١.١٥٠ – ٥١.١٢ = ٠.٠٣٠ متر
الخطأ المتبقي للرصدة رقم ٢ = ٥١.١٥٠ – ٥١.١٤ = ٠.٠١٠ متر
وهكذا كما في العمود الخامس من الجدول التالي.

نحسب مربع كل خطأ متبقي للقياسات:

مريع الخطأ المتبقي للرصدة رقم ١ = ٠.٠٣٠ × ٠.٠٣٠ = ٠.٠٠٠٩ متر مربع
مريع الخطأ المتبقي للرصدة رقم ٢ = ٠.٠١٠ × ٠.٠١٠ = ٠.٠٠٠٠١ متر مربع
وهكذا كما في العمود السادس من الجدول التالي.

نحسب حاصل ضرب (الخطأ المتبقي× الوزن):
للرصدة رقم ١ = ٠.٠٠٠٩ × ٦ = ٠.٠٠٥٤ متر
للرصدة رقم ٢ = ٠.٠٠٠١ × ٥ = ٠.٠٠٠٥ متر
وهكذا كما في العمود السابع من الجدول التالي.

نحسب مجموع حاصل ضرب (مربعات الأخطاء المتبقية × الوزن) أي مجموع العمود السابع = ٠.٠١٥٤ متر مربع

نحسب تباين العينة = ٠.٠١٥٤ ÷ (٦-١))
= ٠.٠٠٣٠٨ متر مربع

نحسب الانحراف المعياري (المعادلة ١٢-١٠) = جذر (٠.٠٠٣٠٨)
= ٠.٠٥٥ متر.

القيمة الأكثر احتمالا = المتوسط ± الانحراف المعياري
= ٥١.١٥٠ ± ٠.٠١٣ متر.

م	القياسات y	الأوزان w	الرصدة × الوزن y.w	الفروق V	مربع الفروق v2	مربع الفروق × الوزن w.v2
1	51.12	6	306.72	0.030	0.000900	0.005400
2	51.14	5	255.70	0.010	0.000100	0.000500
3	51.18	3	153.54	-0.030	0.000900	0.002700
4	51.19	1	51.19	-0.040	0.001600	0.001600
5	51.22	1	51.22	-0.070	0.004900	0.004900
6	51.16	3	153.480	-0.010	0.00010	0.00030

العدد	6					
المجموع	307.01	19	971.85		0.00850	0.01540
المتوسط الموزون			51.150			

تباين المجتمع					0.001700	0.003080
الانحراف المعياري						0.055
الانحراف المعياري للمتوسط						0.013

بمقارنة نتائج هذا المثال بنتائج المثال السابق نجد أن:

- قيمة المتوسط الموزون (٥١.١٥٠ متر) تختلف عن قيمة المتوسط العادي (٥١.١٦٨ متر).
- قيمة الانحراف المعياري للمتوسط الموزون (± ٠.٠١٣ متر) أقل من قيمة الانحراف المعياري العادي (± ٠.٠١٥ متر).

يرجع السبب في هذه الاختلافات إلي أننا في المثال الأول قد تعاملنا مع كل الأرصاد بنفس قيمة الوزن أو الأهمية أو مقدار الثقة فيها، بينما في المثال الثاني استطعنا التفرقة بين الأرصاد الموثوق بها (صاحبة الوزن الكبير) والأرصاد قليلة الثقة أو قليلة الأهمية (صاحبة الوزن الصغير) مما يجعل قيمة المتوسط الموزون تكون أقرب للأرصاد الموثوق بها. وكذلك فأن قيمة

الانحراف المعياري في المثال الثاني أقل من المثال الأول بسبب أن الأرصاد صغيرة الوزن لم تعد مؤثرة بدرجة كبيرة مما يقلل من قيمة التباين أو التشتت بين مجموعة الأرصاد ككل وهذا يؤدي لتحسن قيمة الانحراف المعياري للمتوسط.

و كتجربة إذا اعتمدنا فقط علي أول رصدتين (بصفتهما ذات أعلي وزن) فسنجد أن قيمة المتوسط الموزون ستصبح ٥١.١٢٩ متر وأن قيمة الانحراف المعياري له ستصبح ± ٠.٠٠٤ متر.

م	القياسات y	الأوزان w	الرصدة × الوزن y.w	الفروق v	مربع الفروق v2	مربع الفروق × الوزن w.v2
1	51.12	6	306.720	0.009	0.000083	0.000496
2	51.14	5	255.700	-0.011	0.000119	0.000595
العدد	6					
المجموع	102.26	11	562.42		0.000202	0.001091
المتوسط الموزون			51.129			
تباين المجتمع					0.000040	0.000218
الانحراف المعياري						0.015
الانحراف المعياري للمتوسط						0.004

<u>مثال ٣:</u>

تم إجراء ثلاثة خطوط ميزانية بين نقطتين فكانت الأرصاد كالتالي:

الخط الأول: طول الخط = ١٧٠٠ متر ، فرق المنسوب = ٢٩.٤٩٢ متر
الخط الثاني: طول الخط = ٩٠٠ متر ، فرق المنسوب = ٢٩.٤٤٠ متر
الخط الثالث: طول الخط = ١٠٠٠ متر ، فرق المنسوب = ٢٩.٤٨٠ متر

أحسب القيمة الأكثر احتمالا لفرق المنسوب بين هاتين النقطتين.

من مبادئ أعمال الميزانية أن قيمة الخطأ ستزيد كلما زادت المسافة بين النقطتين بسبب أن رصد المسافات الطويلة سيستغرق وقتا أطول وتكون عدد وقفات الميزان أكثر مما يزيد من

احتمالات حدوث أخطاء في عملية الرصد الحقلي. لذلك فأننا نأخذ الوزن بحيث أنه يتناسب عكسيا مع طول خط الميزانية، أي أن الخطوط الطويلة ستأخذ وزنا أقل من الخطوط القصيرة.

وزن الخط الأول = ١ / ١٧٠٠ = ٠.٠٠٠٥٩
وزن الخط الثاني = ١ / ٩٠٠ = ٠.٠٠١١١
وزن الخط الثالث = ١ / ١٠٠٠ = ٠.٠٠١٠٠

المتوسط الموزون = (٠.٠٠٠٥٩×٢٩.٤٩٢) + (٠.٠٠١١١×٢٩.٤٤٠) + (٠.٠٠١٠٠×٢٩.٤٨٠) ÷ (٠.٠٠٠٥٩ + ٠.٠٠١١١ + ٠.٠٠١٠٠) = ٢٩.٤٦٦ متر

الخطأ المتبقي ١ = ٢٩.٤٦٦ - ٢٩.٤٩٢ = - ٠.٠٢٦ متر
الخطأ المتبقي ٢ = ٢٩.٤٦٦ - ٢٩.٤٤٠ = + ٠.٠٢٦ متر
الخطأ المتبقي ٣ = ٢٩.٤٦٦ - ٢٩.٤٨٠ = - ٠.٠١٤ متر

ونكمل باقي خطوات الحساب كما في الجدول التالي:

م	القياسات y	الأوزان w	الرصدة × الوزن y.w	الفروق v	مربع الفروق v2	مربع الفروق × الوزن w.v2
1	29.492	0.00059	0.017	- 0.026	0.00067	0.000000
2	29.44	0.00111	0.033	0.026	0.00068	0.000001
3	29.48	0.00100	0.029	- 0.014	0.00019	0.000000

العدد	6					
المجموع	88.412	0.002699	0.080		0.00154	0.000001
المتوسط الموزون			29.466			

تباين المجتمع					0.00031	0.0000003
الانحراف المعياري						0.001
الانحراف المعياري للمتوسط						0.010

القيمة الأكثر احتمالا لفرق المنسوب بين النقطتين: ٢٩.٤٤٦ ± ٠.٠١٠ متر.

الفصل الثالث

جبر المصفوفات

٣-١ مقدمة

المصفوفة matrix هي مجموعة من الأرقام مرتبة في صفوف و أعمدة، وقد تكون في صورة مربعة أو مستطيلة الشكل. وعلم الجبر الذي يتم تطبيقه علي العمليات الرياضية للمصفوفات يسمي بجبر المصفوفات matrix algebra. ويستخدم هذا الفرع من علم الجبر في حل المعادلات الرياضية بسرعة و كفاءة أكبر عند استخدام الكمبيوتر، بالإضافة لكونه يحول مجموعة المعادلات المعقدة إلي صورة بسيطة يسهل فهمها وإدارتها. وفي مجال الهندسة المساحية يتم الاعتماد بصورة كبيرة علي جبر المصفوفات في حسابات ضبط الأرصاد و الشبكات.

يمكن تحويل أي مجموعة من المعادلات إلي صورة المصفوفات، فمثلا المعادلات الثلاثة التالية:

$$\begin{aligned} 5x_1+3x_2-4x_3&=9\\ 3x_1-2x_2+7x_3&=3\\ 4x_1+x_2+2x_3&=7 \end{aligned} \qquad (3\text{-}1)$$

يمكن تحويلهم إلي مصفوفات كالتالي:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 7\\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1\\ x2\\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9\\ 3\\ 7 \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}2)$$

ومن ثم يمكن إعادة كتابتهم في صورة معادلة مصفوفات كالتالي:

$$A\ X = C \qquad (3\text{-}3)$$

حيث:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 7\\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} x1\\ x2\\ x3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 9\\ 3\\ 7 \end{vmatrix}$$

وبالطبع فأن المعادلة (٣-٣) ستكون أسهل في التعبير من مجموعة المعادلات (٣-١)، ويمكن استخدام جبر المصفوفات لحل هذه المعادلة وحساب قيمة المصفوفة X (التي تحتوي القيم المجهولة الثلاثة x1, x2, x3).

٣-٢ أبعاد وأنواع المصفوفات

[سنستخدم في هذا الفصل الأحرف الكبيرة capital للدلالة علي المصفوفات بينما سنستخدم الأحرف الصغيرة small للدلالة علي العناصر داخل المصفوفة]

يحمل كل عنصر من عناصر المصفوفة اسما يتكون من اسم المصفوفة ذاتها ورقم الصف و رقم العمود الذين يحددان موقع العنصر داخل المصفوفة، كالتالي:

$$A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

أي أن العنصر a11 هو العنصر الواقع في الصف الأول و العمود الأول من المصفوفة A وقيمته تساوي ٥، بينما العنصر a12 هو العنصر الواقع في الصف الأول و العمود الثاني من المصفوفة A وقيمته تساوي ٣، وهكذا حتى نصل إلي العنصر a33 وهو العنصر الواقع في الصف الثالث و العمود الثالث من المصفوفة A وقيمته تساوي ٢.

لكل مصفوفة بعدين، عدد الصفوف و عدد الأعمدة الذين تتكون منهما المصفوفة، وعادة يكتبان مباشرة (بخط منخفض) بعد اسم المصفوفة بنفس الترتيب. فالمصفوفة $B_{2,3}$ تتكون من سطرين و ثلاثة أعمدة، بينما المصفوفة $C_{4,3}$ تتكون من ٤ سطور و ٣ أعمدة:

$$B_{2,3} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$C_{4,3} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 9 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

توجد ٧ أنواع من المصفوفات:

١- مصفوفة العمود column matrix :

تتكون من أي عدد من الصفوف لكن من عمود واحد فقط:

$$D_{4,1} = \begin{vmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

وقد يكتب عدد الأعمدة (يساوي واحد) في اسم المصفوفة مثل $D_{4,1}$ ، أو قد لا يكتب مثل D_4.

٢- مصفوفة الصف row matrix :

تتكون من أي عدد من الأعمدة، لكن من سطر واحد فقط:

$$D_{1,4} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

والنوعين السابقين قد يطلق عليهما أيضا اسم "المتجه vector" للتفرقة بينهما و بين المصفوفات العادية.

٣- المصفوفة المستطيلة rectangular matrix :

وهي التي تتكون من عدد سطور لا يساوي عدد أعمدتها، مثل $A_{3,4}$, $B_{5,2}$

٤- المصفوفة المربعة square matrix :

وهي التي تتكون من عدد سطور يساوي عدد أعمدتها ، مثل $A_{3,3}$, $B_{5,5}$

٥- المصفوفة المتماثلة symmetric matrix :

وفيها يحدث تماثل تام للقيم أعلي و أسفل قطر المصفوفة. ففي المصفوفة المتماثلة التالية نجد العنصر A_{12} (السطر الأول و العمود الثاني) = العنصر A_{21} (السطر الثاني و العمود الأول)، وأيضا العنصر $A_{1,3}$ (السطر الأول و العمود الثالث)= العنصر $A_{3,1}$ (السطر الثالث و العمود الأول)، أي أن:

$$a_{j,i} = a_{i,j} \tag{3-4}$$

كما في المثال التالي:

$$A_{3,3} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

قطر المصفوفة

وبالطبع فأن المصفوفة المتماثلة يجب أن تكون مصفوفة مربعة.

٦- مصفوفة القطر diagonal matrix :

وفيها تكون عناصر القطر فقط التي تحمل قيم، بينما باقي العناصر غير القطرية تتكون من الصفر:

$$C_{3,3} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

وبالطبع فأن المصفوفة المتماثلة يجب أن تكون مصفوفة مربعة.

٧- مصفوفة الوحدة unit or identity matrix :

هي مصفوفة قطرية تكون عناصر قطرها = ١ (باقي العناصر = صفر)، وعادة يرمز لها بالرمز I :

$$I_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

٣-٣ العمليات الرياضية للمصفوفات

٣-٣-١ مدور المصفوفة

يمكن الحصول علي مدور المصفوفة transpose of a matrix بتغير الصفوف في المصفوفة الأصلية إلي أعمدة، ويرمز لمدور المصفوفة A بالرمز A^T :

$$a^T{}_{i,j} = a_{j,i} \qquad (3\text{-}5)$$

كما في المثال التالي:

$$A_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

فالصف الأول (٣ ، ٥) يصبح هو العمود الأول، والعكس صحيح فالعمود الأول (٢، ٢ ، ٧) يصبح هو الصف الأول، وهكذا:

$$A^T{}_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

٣-٣-٢ تساوي مصفوفتين:

تتساوي مصفوفتين في حالة أن كل عنصر من المصفوفة الأولي يساوي العنصر المقابل له في المصفوفة الثانية:

$$A_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = B_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

٣-٣-٣ جمع و طرح مصفوفتين

لا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين إلا أن كان لهما نفس الأبعاد dimensions (أي نفس عدد الصفوف n و نفس عدد الأعمدة m)، وتكون المصفوفة الناتجة لها نفس الأبعاد أيضا:

$$C_{n,m} = A_{n,m} + B_{n,m} \tag{3-6}$$

$$C_{n,m} = A_{n,m} - B_{n,m} \tag{3-7}$$

ويتم جمع (أو طرح) كل عنصر من المصفوفة الأولي من العنصر المناظر له في المصفوفة الثانية:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \tag{3-8}$$

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} \tag{3-9}$$

فالعنصر في الصف الأول و العمود الأول من المصفوفة A (= ٣) يتم جمعه علي العنصر في الصف الأول و العمود الأول من المصفوفة B (= ١) ليكون الناتج هو العنصر في الصف الأول و العمود الأول من المصفوفة الناتجة C (= ٣ + ١ = ٤) ، وهكذا كما في المثال التالي:

$$A_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad B_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$C_{2,3} = A_{2,3} + B_{2,3} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

وعملية جمع مصفوفتين تعد عملية تبادلية commutative أي أن ترتيب الجمع غير مؤثر:

$$A + B = B + A \tag{3-10}$$

كما أنها أيضا عملية ترافقيه associative أي أن ترتيب الجمع عند وجود الأقواس غير مؤثر أيضا:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \tag{3-11}$$

ويسري ذلك علي طرح المصفوفات أيضا.

٣-٣-٤ ضرب مصفوفة في رقم ثابت:

يمكن ضرب مصفوفة في رقم ثابت scalar multiplication بحيث أن المصفوفة الناتجة عبارة عن حاصل ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا الرقم الثابت:

$$kA = Ak \qquad (3\text{-}12)$$

كما في المثال التالي:

$$3 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 18 \\ 15 & -3 & -6 \\ 12 & 0 & 21 \end{vmatrix}$$

٣-٣-٥ ضرب مصفوفتين

الشرط الأساسي لضرب مصفوفتين أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولي n مساويا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية n. والمصفوفة الناتجة من عملية الضرب يكون لها عدد صفوف المصفوفة الأولية m و عدد أعمدة المصفوفة الثانية u:

$$A_{m,n} B_{n,u} = C_{m,u} \qquad (3\text{-}13)$$

وتتم عملية ضرب مصفوفتين كالتالي: يتم ضرب كل عنصر في الصف الأول من المصفوفة الأولي في عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية وجمع الناتج معا ليصبح هو قيمة العنصر في الصف الأول و العمود الأول من المصفوفة الناتجة، كما في المثال التالي:

$$A_{2,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad B_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

لحساب العنصر c_{11} من المصفوفة الناتجة: نضرب عناصر الصف الأول من A في عناصر العمود الأول من B = (٣ × ١) + (٢ × ٤) + (٦ × -١) = ٣ + ٨ - ٦ = ٥

لحساب العنصر c_{12} من المصفوفة الناتجة: نضرب عناصر الصف الأول من A في عناصر العمود الثاني من B = (٣ × -١) + (٢ × ٣) + (٦ × ١) = -٣ + ٦ + ٦ = ٩

لحساب العنصر c_{13} من المصفوفة الناتجة: نضرب عناصر الصف الأول من A في عناصر العمود الثالث من B = (٣ × ٢) + (٢ × -٤) + (٦ × ١) = ٦ - ٨ + ٦ = ٤

لحساب العنصر c_{21} من المصفوفة الناتجة: نضرب عناصر الصف الثاني من A في عناصر العمود الأول من B = (٥ × ١) + (-١ × ٤) + (٢ × -١) = ٥ - ٤ - ٢ = -١

لحساب العنصر c_{22} من المصفوفة الناتجة: نضرب عناصر الصف الثاني من A في عناصر العمود الثاني من B = (٥ × -١) + (-١ × ٣) + (٢ × ١) = -٥ - ٣ + ٢ = -٦

لحساب العنصر c_{23} من المصفوفة الناتجة: نضرب عناصر الصف الثاني من A في عناصر العمود الثالث من B = (٥ × ٢) + (-١ × -٤) + (٢ × ١) = ١٠ + ٤ + ٢ = ١٦

أي أن المصفوفة الناتجة C ستكون:

$$C_{2,3} = A_{2,3} + B_{3,3} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 4 \\ -1 & -6 & 16 \end{vmatrix}$$

مثال أخر:

$$A_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad B_{3,2} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{2,2} = A_{2,3}\ B_{3,2} = \begin{vmatrix} 31 & 21 \\ 63 & 57 \end{vmatrix}$$

وتتميز عملية ضرب مصفوفتين (في حالة أنهما يحققان شرط الضرب الأساسي) بعدة نقاط تشمل:

١- أنها عملية توزيعية distributive فضرب مصفوفة في قوس يعني ضربها في كل عناصر القوس الداخلية وبنفس إشارة القوس:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (3\text{-}14)$$

وأيضا:

$$(A+B)C = AC + BC \qquad (3\text{-}15)$$

٢- كما أنها أيضا عملية ترافقيه associative أي أن ترتيب الجمع عند وجود الأقواس غير مؤثر أيضا:

$$A(BC) = (AB)C \qquad (3\text{-}16)$$

٣- كما أن مدور حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب مدور المصفوفة الثانية في مدور المصفوفة الأولي (لاحظ الترتيب):

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (3\text{-}17)$$

كما في المثال التالي:

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ then $AB = \begin{bmatrix} 64 & 16 \\ 28 & 23 \end{bmatrix}$

so

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 64 & 28 \\ 16 & 23 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 28 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$$

٤- إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين يساوي صفر A B = 0 فهذا لا يعني بالضرورة أن المصفوفة A أو المصفوفة B تساوي صفر، كما في المثال التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٥- إذا كان A B = A C فهذا لا يعني بالضرورة أن المصفوفة B تساوي المصفوفة C:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = AC$$

$$AB = AC, \text{ but } B \neq C$$

٦- حاصل ضرب AB عادة لا يساوي حاصل ضرب BA.

٣-٣-٦ مقلوب مصفوفة

في الجبر العادي فأن مقلوب أي رقم هو الرقم الذي ينتج ١ عند ضربه في الرقم الأصلي، فمثلا الرقم ٦ مقلوبة = ٦/١ بحيث أن (٦/١) × ٦= ١. نفس المفهوم يسري أيضا في جبر المصفوفات: فلو لدينا مصفوفة مربعة (A مثلا) فأن مقلوبها (عادة A^{-1}) هو مصفوفة مربعة لها نفس أبعاد المصفوفة الأصلية بحيث أن حاصل ضربهما معا يعطي مصفوفة الوحدة unit matrix :

$$A^{-1}A = I \qquad (3\text{-}18)$$

إلا أن بعض المصفوفات ليس لها مقلوب، ويطلق عليها اسم المصفوفة الفردية singular matrix.

توجد عدة طرق رياضية للحصول علي مقلوب أي مصفوفة، لكن سنبدأ هنا بطريقة بسيطة لحساب مقلوب مصفوفة صغيرة مكونة من صفين و عمودين فقط:

<u>محدد المصفوفة determinant of a matrix :</u>

محدد المصفوفة الصغيرة $A_{2,2}$ يساوي فرق حاصل ضرب عناصر القطرين، وعادة يرمز لـه بالرمز IIAII .

وكمثال للمصفوفة:

$$A_{2,2} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

فأن محددها سيكون:

$$\text{IIAII} = a\,d - b\,c = (2 \times 1) - (3 \times 4) = 2 - 12 = -10$$

ولهذه المصفوفة الصغيرة فأن مقلوبها A^{-1} يمكن الحصول عليه بالمعادلة التالية:

$$A^{-1}{}_{2,2} = 1 / \text{IIAII} \begin{vmatrix} d & -b \\ -b & a \end{vmatrix}$$

$$= -1/10 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.4 & -0.2 \end{vmatrix}$$

وبالطبع يمكن التأكد من هذه النتيجة بتطبيق المعادلة (٣-١٨) :

$$A^{-1} \times A = \begin{vmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.4 & -0.2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

أما للمصفوفات العادية (أكبر ن ٢×٢) فهناك عدة طرق للحصول علي مقلوب المصفوفة سنتعرض هنا لواحدة منهم وهي المسماة بطريقة المتجاورات Adjoints :

مقلوب المصفوفة = المصفوفة المتجاورة / محدد المصفوفة (٣-١٩)

A^{-1} = Adjoint of A / determinant of A (3-19)

والمصفوفة المتجاورة هي مدور مصفوفة تسمي بالمصفوفة البديلة cofactor matrix والتي يمكن الحصول علي كل عنصر منها بالطريقة التالية:

العنصر = (-١)$^{\text{الصف+العمود}}$ (حاصل ضرب قطري المصفوفة الصغيرة المتبقية بعد حذف الصف و العمود المناظرين)

مثال:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

الآن سنبدأ في الخطوة الأولي بتكوين المصفوفة البديلة:

العنصر ١،١ = (-١)$^{١+١}$ (نلغي الصف الأول و العمود الأول من A وفي المصفوفة الصغيرة المتبقية: حاصل ضرب عنصري القطر الأول - حاصل ضرب عنصري القطر الثاني)

= (-١)^{٢} (٤ × ٤ - ١ × ٣) = +١ (١٦ - ٣) = ١٣

العنصر ١،٢ = (-١)$^{٢+١}$ (نلغي الصف الأول و العمود الثاني من A وفي المصفوفة الصغيرة المتبقية: حاصل ضرب عنصري القطر الأول - حاصل ضرب عنصري القطر الثاني)

= (-١)^{٣} (٣ × ٤ - ١ × ٢) = -١ (١٢ - ٢) = - ١٠

العنصر ١،٣ = (-١)$^{٣+١}$ (نلغي الصف الأول و العمود الثالث من A وفي المصفوفة الصغيرة المتبقية: حاصل ضرب عنصري القطر الأول - حاصل ضرب عنصري القطر الثاني)

= (-١)^{٤} (٣ × ٣ - ٢ × ٤) = +١ (٩ - ٨) = ١

العنصر ٢،١ = (-١)$^{١+٢}$ (نلغي الصف الثاني و العمود الأول من A وفي المصفوفة الصغيرة المتبقية: حاصل ضرب عنصري القطر الأول - حاصل ضرب عنصري القطر الثاني)

= (-١)^{٣} (٣ × ٤ - ٢ × ٣) = -١ (١٢ - ٦) = - ٦

العنصر ٢،٢ = (-١)$^{٢+٢}$ (نلغي الصف الثاني و العمود الثاني من A وفي المصفوفة الصغيرة المتبقية: حاصل ضرب عنصري القطر الأول - حاصل ضرب عنصري القطر الثاني)

= (-١)^{٤} (٤ × ٤ - ٢ × ٢) = +١ (١٦ - ٤) = ١٢

العنصر ٢،٣ = $(-1)^{2+3}$ (نلغي الصف الثاني و العمود الثالث من A وفي المصفوفة الصغيرة المتبقية: حاصل ضرب عنصري القطر الأول - حاصل ضرب عنصري القطر الثاني)

= (-١)^٥ (٤ × ٣ - ٣ × ٢) = -١ (١٢ - ٦) = -٦

و هكذا ......

فتصبح المصفوفة البديلة كالتالي:

$$\text{cofactor of } A = \begin{vmatrix} 13 & -10 & 1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

وفي الخطوة الثانية فأن المصفوفة المتجاورة = مدور المصفوفة البديلة ستصبح كالتالي:

$$\text{Adjoint of } A = \begin{vmatrix} 13 & -6 & -5 \\ -10 & 12 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \end{vmatrix}$$

الآن سنحسب قيمة محدد المصفوفة = مجموع حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة الأساسية A في العمود الأول من المصفوفة البديلة:

IIAII = (٤ × ١٣) + (٣ × -١٠) + (٢ × ١) = ٢٤

وبالعودة للمعادلة (٣-١٩) يمكننا الآن حساب مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1} = \text{Adjoint of } A \,/\, \text{determinant of } A \qquad (3\text{-}19)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 13 & -6 & -5 \\ -10 & 12 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/24 & -1/4 & -5/24 \\ -5/12 & 1/2 & 1/12 \\ 1/24 & -1/4 & 7/24 \end{bmatrix}$$

٣-٤ برمجة العمليات الرياضية للمصفوفات

أصبح الاعتماد الآن علي استخدام لغات البرمجة في تطوير برامج لأداء العمليات الحسابية لجبر المصفوفات (وخاصة في تطبيقات ضبط الأرصاد و الشبكات المساحية كما سنتعرض له في الفول القادمة). وسنقدم في هذا الجزء نماذج لبرمجة عمليات جبر المصفوفات.

<u>برمجة جمع مصفوفتين:</u>

Addition Algorithm in BASIC, C, FORTRAN, and Pascal

BASIC Language:

```
1000 For i = 1 to M
1010     For j = 1 to N
1020     C(i,j) = A(i,j) + B(i,j)
1030     Next j
1040 Next i
```

FORTRAN Language:

```
      Do 100 I = 1,M
        Do 100 J = 1,N
          C(i,j) = A(i,j) + B(i,j)
100   Continue
```

C Language:

```
for (i=0; i<m; i++)
  for (j=0; j<n; j++)
    C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
```

Pascal Language:

```
For i := 1 to M do
  For j := 1 to N do
    C[i,j] := A[i,j] + B[i,j];
```

<u>برمجة ضرب مصفوفتين:</u>

Multiplication Algorithm in BASIC, C, FORTRAN, and Pascal

BASIC Language:

```
For i = 1 to M
  For k = 1 to N
    C(i,k) = 0.0
    For j = 1 to P
      C(i,k) = C(i,k) + A(i,j)*B(j,k)
    Next j : Next k: Next I
```

FORTRAN Language:

```
      Do 100 i = 1,M
        Do 100 k = 1,N
          C(i,k) = 0.0
          Do 100 j = 1,P
            C(i,k)=C(i,k)+A(i,j)*B(j,k)
100   Continue
```

C Language:

```
for (i=0; i<m; i++)
  for (k=0; k<n; k++) {
    C[i][k] = 0;
    for (j=0; j<p; j++)
      C[i][k] = C[i][k] + A[i][j]*B[j][k];
  } //for k
```

Pascal Language:

```
For i := 1 to M do
  For k := 1 to N do Begin
    C[i,k] := 0.0;
    For j := 1 to P do
      C[i,k] := C[i,k] + A[i,j]*B[j,k]
  End; {for k}
```

<u>برمجة مقلوب مصفوفة:</u>

Inverse Algorithm in BASIC, C, FORTRAN, and PASCAL

BASIC Language:
```
REM INVERT A MATRIX
FOR k = 1 TO n
  FOR j = 1 TO n
    IF j<>k THEN A(k,j) = A(k,j)/A(k,k)
  NEXT j
  A(k,k) = 1/A(k,k)
  FOR i = 1 TO n
    IF i<>k THEN
      FOR j=1 TO n
        IF j<>k THEN A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j)
      NEXT j
      A(i,k) = -A(i,k)*A(k,k)
    END IF
NEXT i: NEXT k
```

FORTRAN Language:
```
      Do 560 k = 1,N
        Do 520 j = 1,N
          If (j.NE.k) Then
            A(k,j) = A(k,j)/A(k,k)
520   Continue
      A(K,K) = 1.0/A(K,K)
      Do 560 i = 1,N
        If (i.EQ.k) Then GOTO 560
          Do 550 j = 1,N
            If (j.NE.k) Then
              A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j)
550      Continue
      A(i,k) = -A(i,k) * A(k,k)
560   Continue
```

C Language:
```
for (k=0; k<n; k++) {
  for (j=0; j<n; j++)
    if (j!=k) A[k][j] = A[k][j]/A[k][k];
  A[k][k] = 1.0/A[k][k];
  for (i=0; i<n; i++)
    if (i!=k) {
      for (j=0; j<n; j++)
        if (j!=k) A[i][j] = A[i][j] - A[i][k]*A[k][j];
      A[i][k] = -A[i][k]*A[k][k];
    } //if i<>k
} //for k
```

Pascal Language:
```
For k := 1 to N do Begin
  For j := 1 to N do
    If (j<>k) then A[k,j] := A[k,j]/A[k,k];
  A[k,k] := 1.0/A[k,k];
  For i := 1 to N do
    If (i<>k) then Begin
      For j := 1 to N do
        If (j<>k) then A[i,j] := A[i,j] - A[i,k]*A[k,j];
      A[i,k] := -A[i,k]*A[k,k];
    End; {If i<>k}
End; {for k}
```

<u>٣-٥ حل المعادلات باستخدام المصفوفات</u>

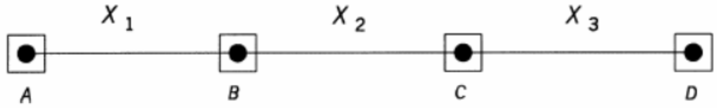
بالعودة للجزء الأول من هذا الفصل سنقدم مثالا لكيفية حل مجموعة من المعادلات باستخدام جبر المصفوفات.

<u>مثال ١:</u>

في الشكل التالي تم وضع جهاز قياس المسافات الكترونيا EDM وتم قياس المسافة من النقطة A إلي النقاط الثلاثة B, C, D فكانت المسافات المقاسة كالآتي:

AB = ١٢٥.٢٧ متر
AC = ٢٥٩.٦٠ متر
AD = ٣٩٥.٨٥ متر

والمطلوب حساب المسافات AB, BC, CD



سنرمز للمسافة AB بالرمز X_1، وللمسافة BC بالرمز X_2، وللمسافة CD بالرمز X_3

ومن ثم يمكننا تكوين ثلاثة معادلات تعبر عن القياسات الثلاثة بدلالة القيم المجهولة الثلاثة كالتالي:

$$\begin{aligned} X_1 &&&= 125.27 \\ X_1 &+ X_2 &&= 259.60 \\ X_1 &+ X_2 &+ X_3 &= 395.85 \end{aligned}$$

ويمكننا إعادة صياغة هذه المعادلات بحيث أن كل معادلة تضم القيم المجهولة الثلاثة كالتالي:

$$\begin{aligned} 1\,X_1 &+ 0\,X_2 &+ 0\,X_3 &= 125.27 \\ 1\,X_1 &+ 1\,X_2 &+ 0\,X_3 &= 259.60 \\ 1\,X_1 &+ 1\,X_2 &+ 1\,X_3 &= 395.85 \end{aligned}$$

ثم نحول المعادلات الثلاثة إلي صورة مصفوفات كالتالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 125.27 \\ 259.60 \\ 395.85 \end{vmatrix}$$

ومن ثم يمكن إعادة كتابتهم في صورة معادلة مصفوفات كالتالي:

$$A\ X = C$$

في الجبر العادي لو لدينا معادلة: ٤ س = ٨ فأن الحل يكون: س = (مقلوب ٤) × ٨ = (١/٤) × ٨ = ٢.

بالمثل فأن حل المعادلة السابقة يكون في الصورة :

$$X = A^{-1}\,C$$

فإذا استخدمنا أي طريقة من طرق حساب مقلوب المصفوفة فأن مقلوب المصفوفة A سيكون:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

وبالتالي فأن قيمة المتجه X سيكون:

$$X = A^{-1}\,C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 125.27 \\ 259.60 \\ 395.85 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 125.27 \\ 134.33 \\ 136.25 \end{vmatrix}$$

أي أن:

X_1 = المسافة AB = ١٢٥.٢٧ متر
X_2 = المسافة BC = ١٣٤.٣٣ متر
X_3 = المسافة CD = ١٣٦.٢٥ متر

مثال ٢:

أوجد قيم المجاهيل x1, x2, x3 في المعادلات التالية:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
2x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

صورة المصفوفات لهذه المعادلات ستكون كالتالي:

$$
\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

ومن ثم فأن الحل سيكون:

$$
x = A^{-1}\,b = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ -1.5 & 3.5 & -2.5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}
$$

أي أن: x1 = ٢ ، x2 = -٣ ، x3 = -٧.

الباب الثاني: رياضيات المساحة المستوية

الفصل الرابع: الترافرس

الفصل الخامس: الميزانية

الفصل السادس: التاكيومترية

الفصل السابع: المنحنيات

الفصل الرابع

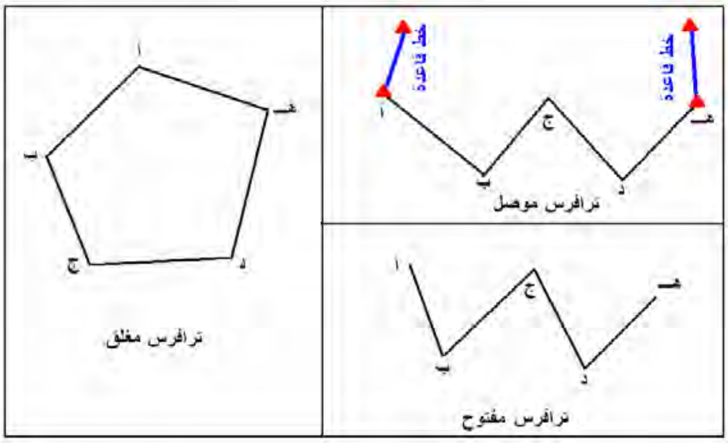
الترافرس

٤-١ مقدمة

كلمة "ترافرس Traverse " هي كلمة لاتينية يعود أصلها للقرن الرابع عشر الميلادي وتعني "المرور بـ" ، وهي كمصطلح مستخدم في قياسات علم المساحة منذ مئات السنين ليعني المضلع (الشكل متعدد النقاط).

توجد ٣ أنواع من الترافرسات:

- الترافرس المغلق Closed or Polygonal Traverse : مضلع معلق تكون نقطة البداية له هي نقطة نهايته.
- الترافرس الموصل Link Traverse : يصل بين خطين معلومين (يسميا خطي قاعدة).
- الترافرس المفتوح Open or free Traverse : مضلع لا هو مغلق ولا هو موصل.

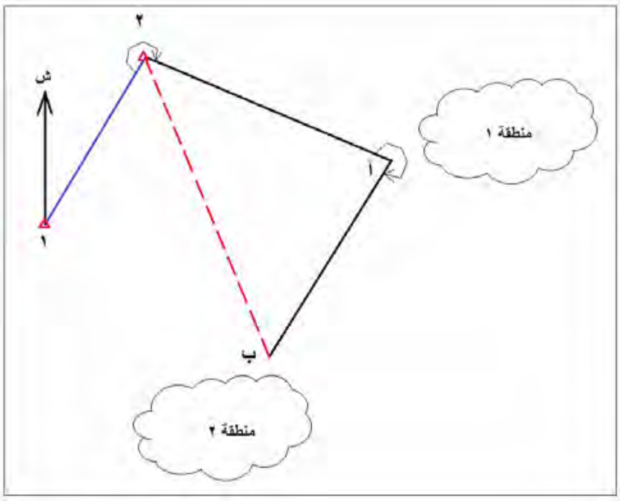


شكل (٤-١) أنواع الترافرس

يعد الترافرس المغلق هو أدق أنواع الترافرسات وهو أساس العمل المساحي الذي يتطلب دقة عالية. يرجع السبب في ذلك أن الترافرس المغلق له إمكانيات حسابية لاكتشاف أخطاء الرصد وتوزيعها (إن كانت في حدود القيم المسموح بها) أو رفض القياسات وإعادة قياسهم مرة أخري في الطبيعة ، مما يؤدي في النهاية إلي الحصول علي إحداثيات (مواقع) دقيقة للمعالم المطلوب رفعها و تمثيلها علي الخريطة. أما الترافرس الموصل ومع أنه أقل دقة من الترافرس المغلق إلا أنه قد يكون مناسبا للمشروعات الهندسية التي تمتد طوليا (مثل خطوط المياه و الكهرباء و الطرق ...الخ). بينما يعد الترافرس المفتوح أقل أنواع الترافرسات من حيث الدقة و يجب تجنبه بقدر الإمكان في الأعمال المساحية.

٤-٢ أهمية الترافرس فى العمل المساحى

قد يسأل سائل ما أهمية الترافرس في أعمال المساحة الحقلية وخاصة أنها تتطلب أرصاد زائدة؟ كما أن البرامج المحملة علي الأجهزة المساحية (خاصة المحطة الشاملة أو التوتال استاشن) يمكنها العمل و حساب إحداثيات النقاط المرصودة الجديدة دون الحاجة لاستخدام وظيفة الترافرس الموجودة بها. وللإجابة علي هذا السؤال نستعرض الشكل التالي:



شكل (٤-٢) أهمية الترافرس

في حالة وجود نقطتين معلومتين الإحداثيات (نقاط ثوابت أرضية) مثل النقطتين ١ و ٢ فأن العمل سيبدأ بوضع الجهاز علي نقطة ٢ و التوجيه علي نقطة ١ مع إدخال إحداثيات كلا النقطتين للجهاز. ثم سيتم وضع النقطة الجديدة أ ورصدها (قياس الزاوية بين الخطين ١-٢ و ٢-أ وأيضا المسافة ٢-أ) ومن ثم يمكن للجهاز حساب إحداثيات هذه النقطة الجديدة (أرجع للإحداثيات المستوية في الجزء ١-٤ من الفصل الأول). ثم سينتقل الجهاز لاحتلال النقطة أ (أصبحت معلومة الآن) وبنفس الطريقة سيتم إنشاء وحساب إحداثيات النقطة الجديدة ب. وبعد ذلك سيبدأ رفع تفاصيل المنطقة ١ اعتمادا علي النقطة أ وكذلك رفع تفاصيل المنطقة ٢ اعتمادا علي النقطة ب. كل هذا العمل دون الحاجة للترافرس.

الآن سنسأل أنفسنا سؤالا بسيطا: هل قياس الزاوية ١-٢-أ وكذلك المسافة ٢-أ خاليا من الأخطاء؟ بالطبع فأن الإجابة ستكون لا، حيث أن الأخطاء موجودة في جميع أعمال المساحة سواء أخطاء الجهاز أو أخطاء الراصد أو الأخطاء الطبيعية العشوائية. ومعني ذلك أن الإحداثيات التي تم حسابها للنقطة أ سيكون بها قدر من الخطأ (مهما كان صغيرا)، وبالتالي فأن كل أعمال رفع تفاصيل المنطقة ١ سيكون بها أخطاء أيضا. ونفس الوضع ينطبق علي إحداثيات النقطة ب ومن ثم أعمال الرفع المساحي للمنطقة ٢. إذن أصبح العمل المساحي غير دقيق مع أننا نتعرض فقط لمثال بسيط مكون من إنشاء نقطتين جديدتين فقط، فما بالك إن استمر العمل بهذه الأسلوب في مشروع كبير يحتوي عدد من النقاط الجديدة؟.

هنا يأتي دور الترافرس وأهميته في اكتشاف أخطاء العمل المساحي و تصحيحها. ففي المثال الحالي سنقوم برصد الخط ب-٢ ليصبح لدينا شكل مثلث مغلق (ترافرس مغلق). هنا يمكننا استخدام حسابات و عادلات الترافرس المغلق (كما سيأتي شرحها في الجزء التالي) لاكتشاف

أخطاء الرصد و توزيعها، ومن ثم زيادة دقة العمل المساحي. بالطبع فأن وجود ترافرس في هذا المثال يتطلب عمل أرصاد زائدة (الخط ب-٢)، إلا أن مميزاته تكمن في إمكانية اكتشاف أخطاء الرصد وتصحيحها بما يزيد من جودة و دقة العمل المساحي الحقلي.

٤-٣ الترافرس المغلق

في الترافرس المغلق يتم رصد الزوايا الداخلية للترافرس بالإضافة لقياس أطوال أضلاعه. أيه قياسات في الطبيعة لن تكون خالية من الأخطاء سواء أخطاء الراصد نفسه أو أخطاء الجهاز أو تأثير العوامل الطبيعية علي مرحلة الرصد الحقلي. لذلك لا بد من حساب قيم الخطأ سواء في الزوايا أو الأضلاع المرصودة ، وبما أن الترافرس مغلق فتوجد شروط (أو معادلات) هندسية تمكننا من حساب قيم هذين النوعين من الأخطاء.

يتم حساب مجموع الزوايا الداخلية المرصودة للترافرس المغلق لكي يتم حساب قيمة الخطأ الزاوي للترافرس المغلق:

ز = مج – (ن-٢)×١٨٠° (٤-١)

$$e = \sum - (n-2)180$$

حيث:

ز أو e قيمة الخطأ الزاوي للترافرس
مج أو $\sum$ مجموع الزوايا الداخلية
ن أو n عدد نقاط الترافرس

نقارن قيمة الخطأ الزاوي بالقيمة المسموح بها والتي تعتمد علي دقة الثيودليت المستخدم في رصد الترافرس. فان كان الخطأ الزاوي أكبر من القيمة المسموح بها فلا بد من إعادة رصد زوايا الترافرس مرة أخري أو علي الأقل إعادة رصد الزوايا المشكوك بها.

مسموح = ٢ و" √ ن (٤-٢)

حيث:

مسموح قيمة الخطأ المسموح به بالثواني
و" دقة الثيودليت المستخدم بالثواني

تجدر الإشارة لوجود صيغة أخري للمعادلة (٤-٢) تكتب أحيانا كالتالي:

مسموح = ٧٠" √ ن

هذه الصيغة تعد قديمة وكانت مستخدمة في السابق مع أجهزة الثيودليت منخفضة الدقة ، ومع توافر أجهزة ثيودليت حديثة دقيقة فأن المعادلة (٤-٢) هي الأنسب في حساب الحدود المسموح بها لأخطاء الزوايا المرصودة بالثيودليت.

إن كان الخطأ الزاوي للترافرس (يسمي أيضا خطأ القفل الزاوي) أقل من القيمة المسموح بها فيتم توزيع هذا الخطأ علي جميع الزوايا الداخلية بالتساوي وبعكس الإشارة:

ت = - ز / ن (٤-٣)

$c = -e / n$

حيث:

ت أو c التصحيح لكل زاوية من زوايا الترافرس.

ثم نحسب قيمة كل زاوية مصححة من زوايا الترافرس بإضافة قيمة التصحيح إلي قيمة الزاوية المرصودة أساسا.

عند تنفيذ الترافرس في الطبيعة يتم تحديد الانحراف لأحد خطوطه وذلك إما: (١) باستخدام البوصلة المغناطيسية ، أو (٢) بربط الترافرس علي أحد الخطوط المعلوم انحرافها.

بعد تصحيح الزوايا الداخلية للترافرس يتم حساب انحراف كل ضلع من أضلاعه (اعتمادا علي الضلع المعلوم الانحراف) باستخدام الزوايا المرصودة بعد تصحيحها:

انحراف الخط اللاحق = انحراف الخط السابق ± ١٨٠° + الزاوية المصححة بينهما (٤-٤)

$Az_{(i+1)} = Az_{(i)} \pm angle$

يضاف ١٨٠° في حالة أن انحراف السابق أقل من ١٨٠° بينما نطرح ١٨٠° في حالة أن الانحراف السابق يكون أكبر من ١٨٠°.

كما يمكن كتابة المعادلة السابقة بصورة أخري:

انحراف الخط اللاحق = انحراف الخط السابق +١٨٠° + الزاوية المصححة بينهما (٤-٤ب)

فإذا زاد الانحراف المحسوب عن ٣٦٠° فنطرح منه ٣٦٠°.

تتكون المرحلة الثالثة من حسابات الترافرس المغلق من حساب مركبات الخطوط:

Δ س = ل جا د (٤-٥)

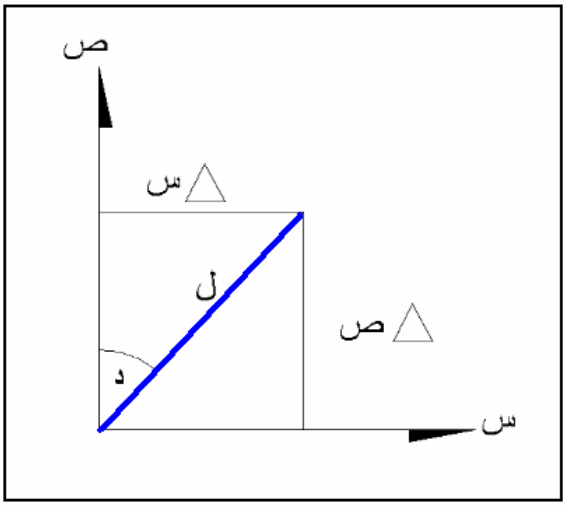
$$AX = L \sin \alpha$$

Δ ص = ل جتا د (٤-٦)

$$AY = L \cos \alpha$$

حيث:

Δ س	أو ΔX	المركبة الأفقية للضلع
Δ ص	أو ΔY	المركبة الرأسية للضلع
ل	أو L	طول الضلع
د	أو α	انحراف الضلع



شكل (٤-٣) مركبات الخط

ثم نحسب قيمة مركبات الخطأ الضلعي للترافرس:

Δ س$_{\text{ت}}$ = مجموع Δ س 		(٤-٧)

Δ ص$_{\text{ت}}$ = مجموع Δ ص 		(٤-٨)

حيث:

Δ س$_{\text{ت}}$ المركبة الأفقية للخطأ الطولي للترافرس
Δ ص$_{\text{ت}}$ المركبة الرأسية للخطأ الطولي للترافرس

يمكن حساب طول الخطأ الطولي للترافرس (يسمي أيضا خطأ القفل الضلعي) من خلال مركبتيه الأفقية والرأسية:

Δ ل = $\sqrt{}$ (Δ س$_{\text{ت}}^{٢}$ + Δ س$_{\text{ت}}^{٢}$) 		(٤-٩)

حيث:

Δ ل خطأ القفل الضلعي للترافرس المغلق.

يتم بعد ذلك تحويل خطأ القفل الضلعي إلي خطأ نسبي:

Δ ل٢ = Δ ل / مجموع أطوال أضلاع الترافرس (٤-١٠)

حيث:

Δ ل٢ نسبة خطأ القفل الضلعي.

غالبا تعتمد قيمة الخطأ الضلعي المسموح به علي طبيعة المشروع ذاته ومدي الدقة المطلوبة به، ومن هنا نقرر إن كان الخطأ الضلعي للترافرس مسموحا به أم لا. كمثال فأن هيئة المساحة المصرية تحدد قيمة ١ / ٢٠٠٠ كخطأ قفل ضلعي نسبي مسموحا به في أعمال الترافرسات داخل المدن. أي إن كانت قيمة خطأ القفل الضلعي للترافرس المرصود (Δ ل٢) أقل من ٢٠٠٠/١ فنعتبره مسموحا به ، وان كان الخطأ اكبر من هذه القيمة فيتم إعادة رصد أو قياس أطوال أضلاع الترافرس مرة أخري.

توجد طريقتين لتوزيع خطأ القفل الضلعي (إن كان أقل من القيمة المسموح بها) للترافرس المغلق وهما: (أ) طريقة بودتش التي تعتمد علي توزيع الخطأ علي كل ضلع من أضلاع الترافرس بنسبة طول هذا الضلع إلي مجموع أطوال أضلاع الترافرس ، (ب) طريقة المركبات والتي تعتمد علي توزيع الخطأ علي كل ضلع من أضلاع الترافرس بنسبة طول مركبات هذا الضلع إلي مجموع أطوال مركبات أضلاع الترافرس. طريقة بودتش مناسبة أكثر لترافرس البوصلة بينما الطريقة الثانية (المركبات) هي الأنسب لترافرس الثيودليت.

<u>(أ) توزيع الخطأ الضلعي بطريقة بودتش:</u>

تصحيح المركبة الأفقية لخط = - Δ سـت× طول الضلع/مجموع أطوال الأضلاع (٤-١١)

تصحيح المركبة الرأسية لخط = - Δ صـت× طول الضلع/مجموع أطوال الأضلاع (٤-١٢)

<u>(ب) توزيع الخطأ الضلعي بطريقة المركبات (تسمي أيضا طريقة الثيودليت):</u>

تصحيح المركبة الأفقية لخط = - Δ س ت × Δ س /
المجموع المطلق Δ س للأضلاع (٤-١٣)

تصحيح المركبة الرأسية لخط = - Δ ص ت × Δ ص /
المجموع المطلق Δ ص للأضلاع (٤-١٤)

لكن في المعادلتين السابقتين فأن مجموع Δ س و مجموع Δ ص للأضلاع يساوي <u>المجموع المطلق</u> absolute sum وليس المجموع الجبري ، بمعني مجموع المركبات دون اعتبار إشاراتها.

في الخطوة الأخيرة من حسابات ترافرس الثيودليت يتم حساب الإحداثيات المصححة (النهائية) لكل نقطة من نقاط الترافرس باستخدام كلا من الزوايا المصححة و أطوال الأضلاع المصححة.

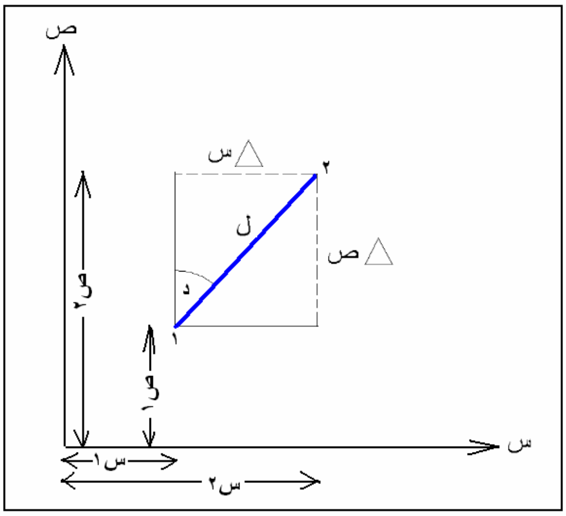
هنا يلزمنا معرفة إحداثيات احدي نقاط الترافرس ولربط المشروع (الترافرس) علي إحداثيات مساحية حقيقية للخرائط الوطنية يلزمنا ربط الترافرس علي احدي نقاط الثوابت الأرضية (معلومة الإحداثيات) للشبكة الوطنية. أما إن لم تتوفر نقطة ثوابت أرضية حقيقية بالقرب من منطقة العمل فيتم فرض إحداثيات احدي نقاط الترافرس وهو ما نسميه الصفر المخصوص.

$$س_٢ = س_١ + \Delta س \qquad (٤-١٥)$$

$$ص_٢ = ص_١ + \Delta ص \qquad (٤-١٦)$$

حيث:

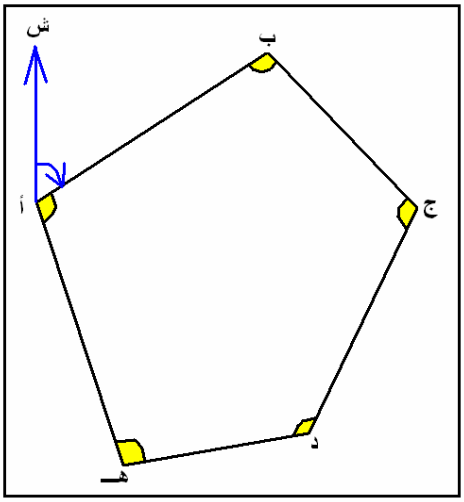
$س_١$ ، $ص_١$ إحداثيات النقطة الأولي للخط
$س_٢$ ، $ص_٢$ إحداثيات النقطة الثانية للخط
Δس ، Δص المركبات المصححة للخط



شكل (٤-٤) إحداثيات نقطتي الضلع

<u>مثال ١:</u>

الشكل التالي يمثل ترافرس مغلق تم قياس زواياه الداخلية وأطوال أضلاعه بالإضافة لرصد انحراف الضلع الأول (أ ب) ، والجدول التالي يشمل قيم الأرصاد.



شكل (٤-٥) مثال لترافرس مغلق

النقطة	الضلع	الطول المقاس (متر)	الزاوية المرصودة
أ			٠٧٧° ٤٤' ٢٠"
	أ ب	١٠٢.٦٩	
ب			١٣٠° ٢٢' ٠٠"
	ب ج	٩٧.٩٤	
ج			٠٨١° ٤٨' ٢٠"
	ج د	٨٣.٥٥	
د			١٣٧° ١٩' ٢٠"
	د هـ	٧٣.٧٤	
هـ			١١٢° ٤٤' ٤٠"
	هـ أ	١٠٨.٣٣	
أ			

مجموع أطوال أضلاع الترافرس = ٤٦٦.٢٥ متر

مجموع الزوايا الداخلية للترافرس = ٥٣٩° ٥٨' ٤٠"

ن = عدد نقاط الترافرس = ٥

الخطأ الزاوي للترافرس المغلق (معادلة ٤-١):

ز = مج – (ن-٢)×١٨٠°
= ٤٠" ٥٨' ٥٣٩° – ((٥-٢) × ١٨٠°)
= ٤٠" ٥٨' ٥٣٩° – (٣ × ١٨٠°)
= ٤٠" ٥٨' ٥٣٩° – ٥٤٠°
= - ٢٠" ١'

فإذا علمنا أن هذا الترافرس تم رصده باستخدام ثيودليت دقته ٢٠" فأن الخطأ الزاوي المسموح به (معادلة ٤-٢):

مسموح = ٢ و" √ ن
= ٢ × ٢٠" √ ٥
= ٨٩.٤٤"
= ٢٩.٤٤" ١'

أي أن خطأ القفل الزاوي لهذا الترافرس أقل من القيمة المسموح بها ، إذن التصحيح لكل زاوية مرصودة (معادلة ٤-٣):

ت = - ز / ن
= - (- ٢٠" ١') / ٥
= - (- ٨٠") / ٥
= + ١٦"

نحسب قيمة كل زاوية مصححة من زوايا الترافرس بإضافة قيمة التصحيح إلي قيمة الزاوية المرصودة أساسا.

الزاوية الداخلية المصححة عند النقطة أ =٢٠" ٤٤' ٧٧° + ١٦" = ٣٦" ٤٤' ٧٧°

الزاوية الداخلية المصححة عند النقطة ب = ٠٠" ٢٢' ١٣٠° + ١٦" = ١٦" ٢٢' ١٣٠°

الزاوية الداخلية المصححة عند النقطة ج = ٢٠" ٤٨' ٨١° + ١٦" = ٣٦" ٤٨' ٨١°

الزاوية الداخلية المصححة عند النقطة د = ٢٠" ١٩' ١٣٧° + ١٦" = ٣٦" ١٩' ١٣٧°

الزاوية الداخلية المصححة عند النقطة هـ = ٤٠" ٤٤' ١١٢° + ١٦" = ٥٦" ٤٤' ١١٢°

تحقيق:
مجموع الزوايا المصححة = ٠٠" ٠٠' ٥٤٠°

معلوم في هذا الترافرس أن انحراف الخط أ ب = ٣٦" ١٣' ٧٠°

الآن يتم حساب انحراف كل ضلع من أضلاعه (اعتمادا علي الضلع المعلوم الانحراف) باستخدام الزوايا المرصودة بعد تصحيحها (المعادلة ٤-٤):

انحراف ب ج = انحراف أ ب + ١٨٠° - الزاوية المصححة عند ب
= ٣٦" ١٣' ٠٧٠° + ١٨٠° - ١٦" ٢٢' ١٣٠° = ٢٠" ٥١' ١١٩°

انحراف ج د = انحراف ب ج + ١٨٠° - الزاوية المصححة عند ج
= ٢٠" ٥١' ١١٩° + ١٨٠° - ٣٦" ٤٨' ٨١° = ٤٤" ٠٢' ٢١٨°

انحراف د هـ = انحراف ج د - ١٨٠° - الزاوية المصححة عند د
= ٤٤" ٠٢' ٢١٨° - ١٨٠° - ٣٦" ١٩' ١٣٧°
= - ٥٢" ١٦' ٩٩° = ٠٨" ٤٣' ٢٦٠°

انحراف هـ أ = انحراف د هـ - ١٨٠° - الزاوية المصححة عند هـ
= ٠٨" ٤٣' ٢٦٠° - ١٨٠° - ٥٦" ٤٤' ١١٢°
= - ٤٨" ٠١' ٣٢° = ١٢" ٥٨' ٣٢٧°

<u>تحقيق:</u>

انحراف أ ب = انحراف هـ أ - ١٨٠° - الزاوية المصححة عند أ
= ١٢" ٥٨' ٣٢٧° - ١٨٠° - ٣٦" ٤٤' ٧٧°
= ٣٦" ١٣' ٠٧٠° = الانحراف المعلوم.

تتكون المرحلة الثالثة من حسابات الترافرس المغلق من حساب مركبات الخطوط (المعادلة ٤-٥ و ٤-٦) كما في الجدول التالي:

الضلع	الطول (ل)	الانحراف (ز)	Δس= ل جا ز	Δص= ل جتا ز
أ ب	١٠٢.٦٩	٣٦" ١٣' ٠٧٠°	٩٦.٦٣٥	٣٤.٧٤٠
ب ج	٩٧.٩٤	٢٠" ٥١' ١١٩°	٨٤.٩٤٢	-٤٨.٧٥٦
ج د	٨٣.٥٥	٤٤" ٠٢' ٢١٨°	-٥١.٤٩١	-٦٥.٧٩٧
د هـ	٧٣.٧٤	٠٨" ٤٣' ٢٦٠°	-٧٢.٧٧٥	-١١.٨٩٣
هـ أ	١٠٨.٣٣	١٢" ٥٨' ٣٢٧°	-٥٧.٤٥٤	٩١.٨٣٩

ثم نحسب قيمة مركبات الخطأ الضلعي للترافرس (المعادلة ٤-٥ و ٤-٦):

Δ $س_{ت}$ = مجموع Δ س = - ٠.١٤٣ متر

Δ $ص_{ت}$ = مجموع Δ ص = + ٠.١٣٣ متر

نحسب خطأ القفل الضلعي(المعادلة ٥-٨):

Δ ل = √ (Δ $س_{ت}^{٢}$ + Δ $س_{ت}^{٢}$) = √ ($(-٠.١٤٣)^{٢}$ + $(+٠.١٣٣)^{٢}$) = ٠.١٩٥ متر

يتم بعد ذلك تحويل خطأ القفل الضلعي إلي خطأ نسبي (المعادلة ٤-٨):

Δ ل٬ = Δ ل / مجموع أطوال أضلاع الترافرس = ٠.١٩٥ / ٤٦٦.٢٥
= ١ / ٢٣٨٧.٤٨

وحيث أن قيمة خطأ القفل الضلعي للترافرس المرصود (٢٣٨٧/١) أقل من ٢٠٠٠/١ فنعتبره مسموحا به.ثم نستخدم طريقة المركبات لتوزيع خطأ القفل الضلعي (المعادلة ٤-١١ و ٤-١٢) كما في الجدول التالي:

تصحيح Δس لأي ضلع = ٠.١٤٣ × Δس الضلع / المجموع المطلق Δس لجميع الأضلاع
تصحيح Δص لأي ضلع = - ٠.١٣٣ × Δص الضلع / المجموع المطلق Δص لجميع الأضلاع

الضلع	Δس	Δص	تصحيح Δس	تصحيحΔص
أ ب	٩٦.٦٣٥	٣٤.٧٤٠	٠.٠٣٨٠	- ٠.٠١٨٣
ب ج	٨٤.٩٤٢	- ٤٨.٧٥٦	٠.٠٣٣٤	- ٠.٠٢٥٦
ج د	- ٥١.٤٩١	- ٦٥.٧٩٧	٠.٠٢٠٣	- ٠.٠٣٤٦
د هـ	- ٧٢.٧٧٥	١١.٨٩٣	٠.٠٢٨٦	- ٠.٠٠٦٣
هـ أ	- ٥٧.٤٥٤	٩١.٨٣٩	٠.٠٢٢٦	- ٠.٠٤٨٣
المجموع الجبري	- ٠.١٤٣	+ ٠.١٣٢	+ ٠.١٤٣	- ٠.١٣٢
			تحقيق	
المجموع المطلق	٣٦٣.٢٩٧	٢٥٣.٠٢٥		

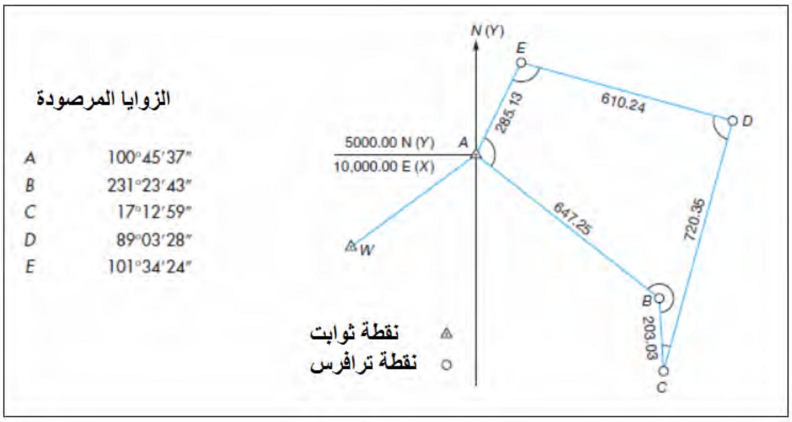
الضلع	Δس المصححة	Δص المصححة
أ ب	٩٦.٦٧٣	٣٤.٧٢٢
ب ج	٨٤.٩٧٥	- ٤٨.٧٨٢
ج د	- ٥١.٤٧١	- ٦٥.٨٣٢
د هـ	- ٧٢.٧٤٦	- ١١.٨٩٩
هـ أ	- ٥٧.٤٣١	٩١.٧٩١

في الخطوة الأخيرة من حسابات ترافرس الثيودليت يتم حساب الإحداثيات المصححة (النهائية) لكل نقطة من نقاط الترافرس باستخدام المركبات المصححة (معادلة ٤-١٣ و ٤-١٤). فإذا علمنا أن الإحداثيات الحقيقية للنقطة أ هي ٦٣٤٨.١٥٢ ، ١٤٨٤٧.٧٤٤ متر فأن الإحداثيات النهائية لنقاط الترافرس ستكون كالآتي:

النقطة	الضلع	Δ س المصححة	Δ ص المصححة	س	ص
أ				٦٣٤٨.١٥٢	١٤٨٤٧.٧٤٤
	أ ب	٩٦.٦٧٣	٣٤.٧٢٢		
ب				٦٤٤٤.٨٢٥	١٤٨٨٢.٤٦٦
	ب ج	٨٤.٩٧٥	٤٨.٧٨٢ -		
ج				٦٥٢٩.٨٠٠	١٤٨٣٣.٦٨٤
	ج د	٥١.٤٧١ -	٦٥.٨٣٢ -		
د				٦٤٧٨.٣٢٩	١٤٧٦٧.٨٥٢
	د هـ	٧٢.٧٤٦ -	١١.٨٩٩ -		
هـ				٦٤٠٥.٥٨٣	١٤٧٥٥.٩٥٣
	هـ أ	٥٧.٤٣١ -	٩١.٧٩١		
أ	تحقيق			٦٣٤٨.١٥٢	١٤٨٤٧.٧٤٤

<u>مثال ٢:</u>

أضبط الترافرس الموضح في الشكل التالي:



$\sum =\ 540^{o}\ 00'\ 11''$

$e = \sum - (n-2)180 = 11''$

c = -e / n = - 11 / 5 = - 2.2"

ويمكن تقريب التصحيح لأقرب ثانية بحيث أن كل زاوية تأخذ تصحيح = -٢" بينما أصغر زاوية (C) تأخذ تصحيح -٣" :

Point (1)	الزاوية المصححة	التصحيح	الزاوية المرصودة
A	100°45′37″	2″	100°45′35″
B	231°23′43″	3″	231°23′40″
C	17°12′59″	3″	17°12′56″
D	89°03′28″	1″	89°03′27″
E	101°34′24″	2″	101°34′22″
	Σ = 540°00′11″	Σ = 11″	Σ = 540°00′00″

حساب الانحرافات:

126°55′17″ = AB
+180°
306°55′17″ = BA
+231°23′41″ + B
538°18′58″ – 360° = 178°18′58″ – BC
–180°
358°18′58″ = CD
+17°12′56″ + C
375°31′54″ – 360° = 15°31′54″ = CD
–180°
195°31′54″ = DC

+89°03′26″ + D
284°35′20″ = DE
–180°
104°35′20″ = ED
+101°34′22″ + E
206°09′42″ = EA
–180°
26°09′42″ = AE
+100°45′35″ + A
126°55′17″ = AB

حساب مركبات الخطوط:

Station	الانحراف	الطول	ΔX	ΔY
A	126°55′17″	647.25	517.451	–388.815
B	178°18′58″	203.03	5.966	–202.942
C	15°31′54″	720.35	192.889	694.045
D	284°35′20″	610.24	–590.565	153.708
E	206°09′42″	285.13	–125.715	–255.919
A		Σ = 2466.00	Σ = 0.026	Σ = 0.077

حساب خطأ القفل الطولي: Δل = √ [(٠.٠٢٦)^{٢} + (٠.٠٧٧)^{٢}] = ٠.٠٨١

تصحيح المركبات بطريقة بودتش:

			غير المصححة		المصححة		الاحداثيات	
Station	الانحراف	الطول	ΔX	ΔY	ΔX	ΔY	X	Y
A			(–0.007)	(–0.020)			10,000.00	5000.00
	126°55′17″	647.25	517.451	–388.815	517.444	–388.835		
B			(–0.002)	(–0.006)			10,517.44	4611.16
	178°18′58″	203.03	5.966	–202.942	5.964	–202.948		
C			(–0.008)	(–0.023)			10,523.41	4408.22
	15°31′54″	720.35	192.889	694.045	192.881	694.022		
D			(–0.006)	(–0.019)			10,716.29	5102.24
	284°35′20″	610.24	–590.565	153.708	–590.571	153.689		
E			(–0.003)	(–0.009)			10,125.72	5255.93
	206°09′42″	285.13	–125.715	–255.919	–125.718	–255.928		
A							10,000.00✓	5000.00✓
		Σ = 2466.00	Σ = 0.026	Σ = 0.077	Σ = 0.000	Σ = 0.000		

٤-٤ الأرصاد الناقصة فى الترافرس المغلق

في تطبيقات الهندسة المدنية يجب رصد جميع زوايا و أضلاع الترافرس المغلق. لكن في الحالات القصوى (وخاصة تطبيقات المساحة في المناجم والأنفاق) ربما يواجه الراصد صعوبة رصد ضلع معين من أضلاع ترافرس مغلق. في مثل هذه الحالات نستفيد من الخواص الهندسية والحسابية للترافرس المغلق لحساب الأرصاد الناقصة والتي يجب ألا تزيد عن اثنين. لكن تجدر الإشارة إلي أن حساب هذه الأرصاد الناقصة يكون علي حساب عدم اكتشاف أية أخطاء في الترافرس ، وفي هذه الحالة يجب التأكد من أن كل القياسات قد تمت بدقة عالية مع تكرار رصد كلا منها أكثر من مرة للتأكد من دقتها قبل استخدامها في حساب الأرصاد الناقصة.

ومن أمثلة الأرصاد الناقصة في الترافرس المغلق حالة رصد أضلاع وزوايا أضلاع ترافرس مغلق إلا ضلع واحد ناقص (لوجود عائق في مساره يمنع الرصد) يمكن حساب طول هذا الضلع و انحرافه كالآتي:

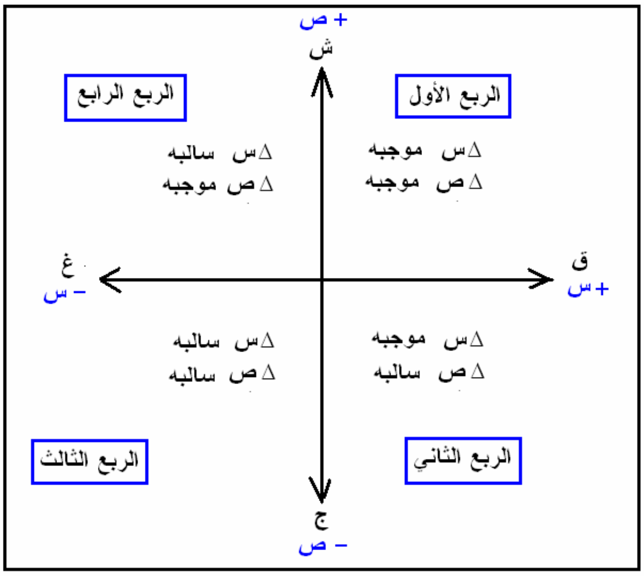
Δ س الضلع الناقص = - مجموع Δ س لباقي أضلاع الترافرس (٤-١٧)

Δ ص الضلع الناقص = - مجموع Δ ص لباقي أضلاع الترافرس (٤-١٨)

طول الضلع الناقص = √ (مربع Δ س الضلع الناقص +
مربع Δ س الضلع الناقص) (٤-١٩)

انحراف الضلع الناقص = ظ$^{-١}$ (Δ س الضلع الناقص / Δ ص الضلع الناقص) (٤-٢٠)

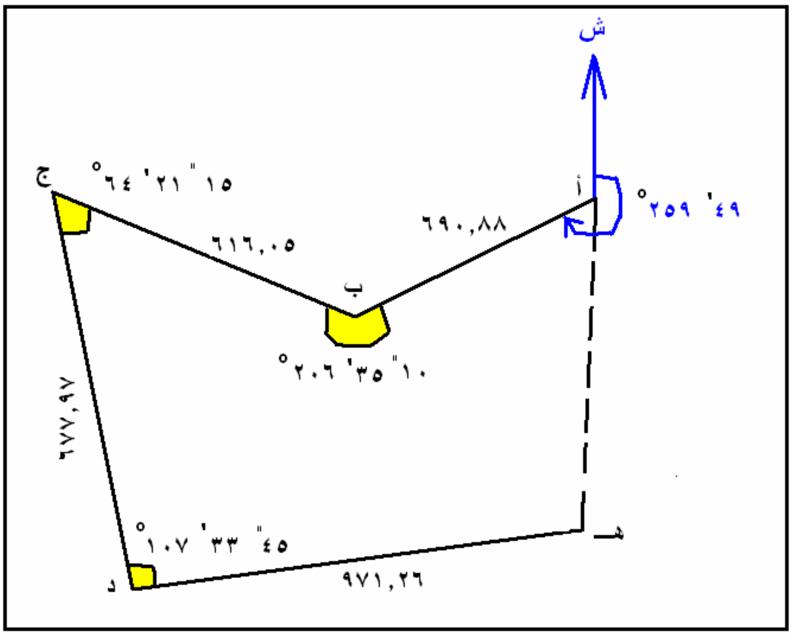
يجب مراعاة أن استخدام الآلة الحاسبة في المعادلة السابقة سينتج عنه قيمة الانحراف المختصر للضلع الناقص ، ومن خلال معرفة إشارة كل من Δ س ، Δ ص لهذا الضلع يمكن تحديد الربع الواقع به ومن ثم تحويل الانحراف المختصر إلي الانحراف الدائري لهذا الضلع الناقص.



شكل (٤-٦) إشارات مركبات الأضلاع في كل ربع

مثال:

في الشكل التالي لم يمكن رصد طول الضلع أ هـ أو الزاويتين الداخليتين عند كلا من نقطة أ و نقطة هـ.



شكل (٤-٧) مثال للأرصاد الناقصة في الترافرس المغلق

من خلال الانحراف المعلوم للضلع أ ب والزوايا الداخلية المرصودة يمكن حساب انحرافات باقي الأضلاع كالتالي:

انحراف أ ب = ٠٠" ٤٩' ٢٥٩°

انحراف ب ج = ٠٠" ٤٩' ٢٥٩° – ١٨٠° + ١٠" ٣٥' ٢٠٦° = ١٠" ٢٤' ٢٨٦°

انحراف ج د = ١٠" ٢٤' ٢٨٦° – ١٨٠° + ١٥" ٢١' ٦٤° = ٢٥" ٤٥' ١٧٠°

انحراف د هـ = ٢٥" ٤٥' ١٧٠° – ١٨٠° + ٤٥" ٣٣' ١٠٧° = ١٠" ١٩' ٩٨°

نحسب مركبات أضلاع الترافرس:

الضلع	الطول (ل)	الانحراف (ز)	Δس= ل جا د	Δص= ل جتا د
أ ب	٦٩٠.٨٨	٠٠" ٤٩' ٢٥٩°	- ٦٧٩.٩٩٧	- ١٢٢.١٤٧
ب ج	٦١٦.٠٥	١٠" ٢٤' ٢٨٦°	- ٥٩٠.٩٧٧	+ ١٧٣.٩٦٥
ج د	٦٧٧.٩٧	٢٥" ٤٥' ١٧٠°	+ ١٠٨.٨٩٨	- ٦٦٩.١٦٧
د هـ	٩٧١.٢٦	١٠" ١٩' ٩٨°	+ ٩٦١.٠٣٩	- ١٤٠.٥٣٤
هـ أ	؟	؟	؟	؟
		المجموع الجبري	- ٢٠١.٠٣٧	- ٧٥٧.٨٨٣

من المعادلة (٤-١٧):

Δ س الضلع الناقص هـ أ = - مجموع Δ س لباقي أضلاع الترافرس

= - (-٢٠١.٠٣٧) = + ٢٠١.٠٣٧ متر

من المعادلة (٤-١٨):

Δ ص الضلع الناقص هـ أ = - مجموع Δ ص لباقي أضلاع الترافرس

= - (-٧٥٧.٨٨٣) = + ٧٥٧.٨٨٣ متر

من المعادلة (٤-١٩):

طول الضلع الناقص هـ أ = √ (مربع Δ س الضلع الناقص + مربع Δ س الضلع الناقص)

= √ (٢٠١.٠٣٧ ^{٢} + ٧٥٧.٨٨٣ ^{٢})

= ٧٨٤.٠٩٣ متر

من المعادلة (٤-٢٠):

الانحراف المختصر للضلع الناقص = ظ $^{-١}$ (Δ س الضلع الناقص / Δ ص الضلع الناقص)

= ظ $^{-١}$ (+ ٢٠١.٠٣٧ / + ٧٥٧.٨٨٣)

= ش ٢٥.٧٤" ٥١' ١٤° ق

وحيث أن إشارة Δ س موجبة وإشارة Δ ص موجبة أيضا فأن هذا الانحراف المختصر يقع في الربع الأول. وفي هذا الربع فأن الانحراف الدائري يساوي الانحراف المختصر.

الانحراف الدائري للضلع هـ أ = ٢٥.٧٤" ٥١' ١٤°

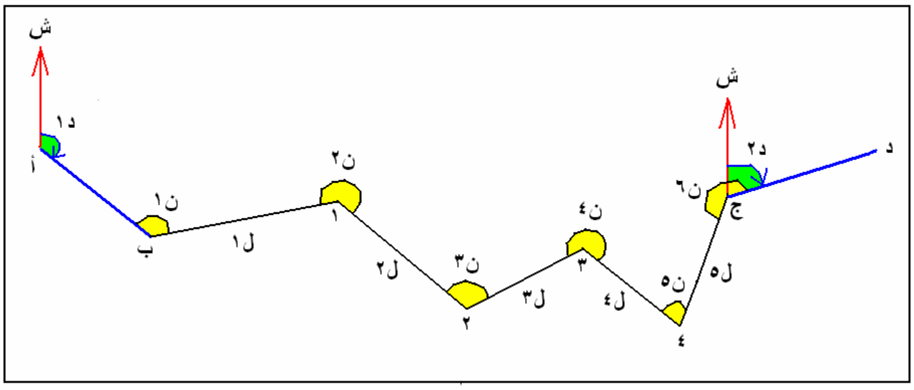
الانحراف الدائري للضلع أ هـ = الانحراف الخلفي للضلع هـ أ

= الانحراف الأمامي للضلع هـ أ + ١٨٠°

= ٢٥.٧٤" ٥١' ١٤° + ١٨٠° = ٢٥.٧٤" ٥١' ١٩٤°

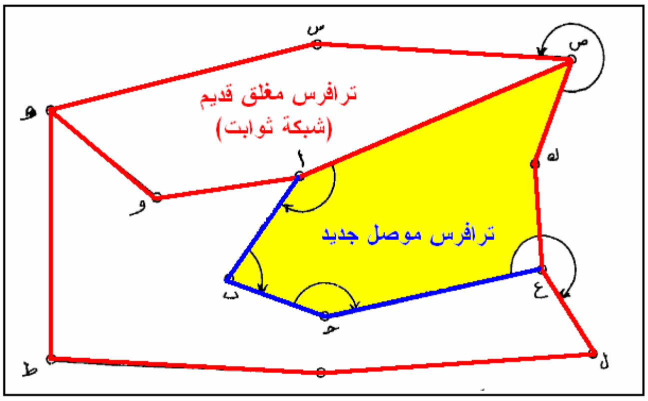
٤-٥ الترافرس الموصل

جاء أسم الترافرس الموصل من حقيقية أنه يصل بين نقطتين معلومتين الإحداثيات (أ و ج في شكل ٤-٦) كما أنه يصل بين خطين معلومين الانحراف (أ ب ، ج د). يتكون العمل الميداني في الترافرس الموصل من رصد الزاوية بين خط الربط الأول وأول أضلاع الترافرس ثم رصد الزوايا بين أضلاع الترافرس وكذلك الزاوية بين آخر أضلاع الترافرس وخط الربط الثاني ، بالإضافة لقياس أطوال الأضلاع سواء بالشريط أو بجهاز قياس مسافات الكترونيا.



شكل (٤-٨) الترافرس الموصل

أحيانا نحتاج لعمل ترافرس موصل لإنشاء نقاط ثوابت أرضية جديدة (تكثيف شبكة الثوابت) في منطقة العمل التي يتوافر بها شبكة ثوابت قديمة (ترافرس مغلق علي سبيل المثال).



شكل (٤-٩) أحد تطبيقات الترافرس الموصل

في الترافرس الموصل يكون عدد الزوايا أكثر بواحد من عدد النقاط ، فإذا كان عدد أضلاع الترافرس الموصل = ن فأن عدد الزوايا المقاسة سيكون = ن +١. تتكون خطوات العمل المساحي في حالة الترافرس الموصل من نفس خطوات تنفيذ الترافرس المغلق (الاستكشاف ورسم الكروكي واختيار وتثبيت نقاط الترافرس .... الخ) لكنها تختلف في الحسابات.

يتم حساب خطأ القفل الزاوي في الترافرس الموصل كالآتي:

ز = مج – (د١ – د٢ + (ن+١)×١٨٠°) (٤-٢١)

حيث:

ز قيمة الخطأ الزاوي للترافرس
مج مجموع الزوايا المقاسة بين أضلاع الترافرس والمأخوذة دائما عكس اتجاه دوران عقرب الساعة من الضلع السابق إلي الضلع اللاحق ابتداء من خط الربط الأول.
ن عدد نقاط الترافرس
د١ انحراف خط الربط الأول
د٢ انحراف خط الربط الأخير

أما في حالة أن زوايا الترافرس الموصل قد تم رصدها مع اتجاه دوران عقرب الساعة فأن معادلة حساب خطأ القفل الزاوي تصبح:

ز = مج – (د٢ – د١ + (ن+١)×١٨٠°) (٤-٢٢)

يمكن أيضا حساب خطأ القفل الزاوي للترافرس الموصل بطريقة أخري تعتمد علي استخدام الزوايا المرصودة لحساب انحرافات خطوط الترافرس وصولا إلي حساب انحراف خط الربط الأخير ، ثم نقارن الانحراف المحسوب لهذا الخط مع انحرافه المعلوم أصلا:

ز = الانحراف المحسوب لخط الربط الأخير – الانحراف المعلوم لخط الربط الأخير

نقارن قيمة الخطأ الزاوي بالقيمة المسموح بها والتي تعتمد علي دقة الثيودليت المستخدم في رصد الترافرس. فان كان الخطأ الزاوي أكبر من القيمة المسموح بها فلا بد من إعادة رصد زوايا الترافرس مرة أخري أو علي الأقل إعادة رصد الزوايا المشكوك بها. وقيمة المسموح به في زوايا الترافرس الموصل هو نفس قيمة الترافرس المغلق (معادلة ٤-٢) إلا أن عدد الزوايا في حالة الترافرس الموصل سيكون أكبر بواحد من عدد نقاط الترافرس:

مسموح = ٢ و" √ ن+١ (٤-٢٣)

حيث:

مسموح قيمة الخطأ المسموح به بالثواني
و" دقة الثيودليت المستخدم بالثواني

في الخطوة الثانية من حسابات الترافرس الموصل نقوم بحساب انحرافات خطوط الترافرس بدءا من انحراف الضلع المعلوم (خط الربط) الأول باستخدام قيم الزوايا المرصودة. ثم نقوم بتوزيع خطأ القفل الزاوي (في حالة أنه أقل من القيمة المسموح بها) علي انحرافات الخطوط كالآتي:

تصحيح انحراف الخط الأول: ت$_1$ = - ز / (ن + ١) (٤-٢٤)

تصحيح انحراف الخط الثاني: ت$_2$ = - ٢ ز / (ن + ١) (٤-٢٥)

وهكذا إلي أن نصل إلي:

تصحيح انحراف خط الربط الأخير: $ت_{ن+١}$ = - ز (ن+١) / (ن+١) = - ز (٤-٢٦)

تتكون المرحلة الثالثة من حسابات الترافرس المغلق من حساب مركبات الخطوط بنفس الطريقة كما في الترافرس المغلق (معادلة ٤-٥ و ٤-٦) ثم نحسب إحداثيات نقاط الترافرس بالاعتماد علي الإحداثيات المعلومة لنقطة الربط الأولي. ثم نحسب قيمة مركبات الخطأ الضلعي للترافرس الموصل كالآتي:

Δ $س_{ت}$ = $س_{ب}$ – $س_{ج}$ + مجموع Δ س (٤-٢٧)

Δ $ص_{ت}$ = $ص_{ب}$ – $ص_{ج}$ + مجموع Δ ص (٤-٢٨)

حيث:

Δ $س_{ت}$ المركبة الأفقية للخطأ الطولي للترافرس
Δ $ص_{ت}$ المركبة الرأسية للخطأ الطولي للترافرس
$س_{ب}$ الاحداثي الشرقي لنقطة الربط الأولي (نقطة أ).
$ص_{ب}$ الاحداثي الشمالي لنقطة الربط الأولي (نقطة أ).
$س_{ج}$ الاحداثي الشرقي لنقطة الربط الأخيرة (نقطة ج).
$ص_{ج}$ الاحداثي الشمالي لنقطة الربط الأخيرة (نقطة ج).

يمكن حساب طول الخطأ الطولي للترافرس (يسمي أيضا خطأ القفل الضلعي) من خلال مركبتيه الأفقية والرأسية (المعادلة ٥-٨):

Δ ل = $\sqrt{}$ (Δ $س_{ت}^{٢}$ + Δ $س_{ت}^{٢}$)

بعد ذلك يتم تحويل خطأ القفل الضلعي إلي خطأ نسبي كما في حالة الترافرس المغلق (معادلة ٤-٨):

Δ $ل_{٢}$ = Δ ل / مجموع أطوال أضلاع الترافرس

حيث:

Δ $ل_{٢}$ نسبة خطأ القفل الضلعي.

كما سبق القول فغالبا تعتمد قيمة الخطأ الضلعي المسموح به علي طبيعة المشروع ذاته ومدي الدقة المطلوبة به ، ومن هنا نقرر إن كان الخطأ الضلعي للترافرس مسموحا به أم لا. كمثال فأن هيئة المساحة المصرية تحدد قيمة ١ / ٢٠٠٠ كخطأ قفل ضلعي نسبي مسموحا به في أعمال الترافرسات داخل المدن. أي إن كانت قيمة خطأ القفل الضلعي للترافرس المرصود (Δ $ل_{٢}$) أقل من ٢٠٠٠/١ فنعتبره مسموحا به ، وان كان الخطأ اكبر من هذه القيمة فيتم إعادة رصد أو قياس أطوال أضلاع الترافرس مرة أخري.

نستخدم طريقة المركبات (طريقة الثيودليت) لتوزيع خطأ القفل الضلعي (إن كان أقل من القيمة المسموح بها) للترافرس الموصل كما سبق في حالة الترافرس المغلق (معادلة ٤-١١ و ٤-١٢):

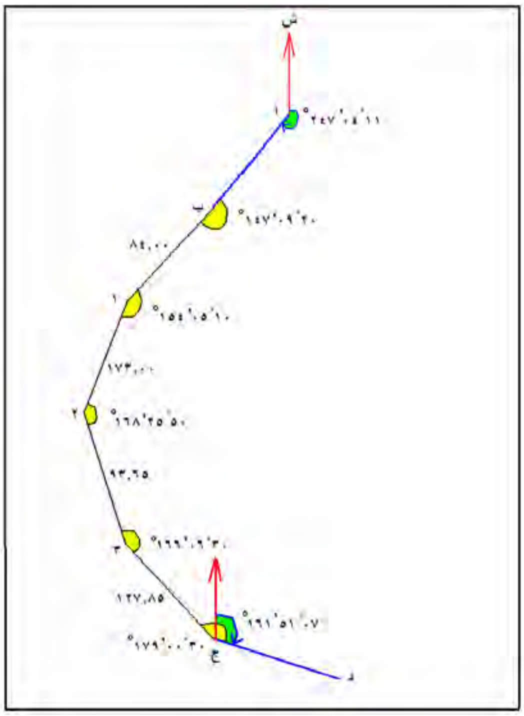
تصحيح المركبة الأفقية لخط = - Δ س ت × Δ س / المجموع المطلق Δ س للأضلاع

تصحيح المركبة الرأسية لخط = - Δ ص ت × Δ ص / المجموع المطلق Δ ص للأضلاع

باستخدام المركبات المصححة يتم حساب قيم الإحداثيات المصححة لجميع نقاط الترافرس الموصل.

<u>مثال:</u>

الشكل التالي يمثل أرصاد ترافرس موصل يبدأ من نقطة ب (١٠٧٤.١٨٢ ، ١١٢٥.٠٥٣) إلي نقطة ج (١٠٤٤.٨٤٦ ، ٦٦٨.٨٩٥) والمطلوب حساب إحداثيات نقاط هذا الترافرس.



شكل (٤-١٠) مثال لترافرس موصل

الخطأ الزاوي للترافرس (معادلة ٤-١٩):

ز = مج – (د١ – د٢ + (ن+١)×١٨٠°)
= (٢٠" ٠٩' ١٤٧° + ١٠" ٠٥' ١٥٤° + ٥٠" ٢٥' ١٦٨° + ٣٠" ٠٦' ١٦٦° + ٣٠" ٠٠' ١٧٩°) - ٠٧" ٥١' ١٦١° - ١١" ٠٤' ٢٤٧° + ((٥+١) × ١٨٠°)
= + ٢٤"

فإذا علمنا أن هذا الترافرس تم رصده باستخدام ثيودليت دقته ١٠" فأن الخطأ الزاوي المسموح به (معادلة ٤-٢):

مسموح = ٢ و" √ ن
= ٢ × ٢٠" √ ٥ = ٤٤.٧٢ "

أي أن خطأ القفل الزاوي لهذا الترافرس أقل من القيمة المسموح بها ، إذن التصحيح لكل زاوية مرصودة (معادلة ٤-٣):

ت = - ز / ن
= - (+ ٢٤") / ٥ = - ٤.٨"

ثم نقوم بحساب انحراف كل ضلع من أضلاعه اعتمادا علي الضلع المعلوم الانحراف (مع تصحيح الزوايا المقاسة في نفس الخطوة:

انحراف ب ١ = انحراف أ ب - ١٨٠° + الزاوية المصححة عند ب
انحراف ب ١ = انحراف أ ب - ١٨٠° + (الزاوية المرصودة عند ب + التصحيح)
= ١١" ٠٤' ٢٤٧° - ١٨٠° + (٢٠" ٠٩' ١٤٧° – ٤.٨")
= ٢٦.٢" ١٣' ٢١٤°

انحراف ١ ٢ = انحراف ب ١ - ١٨٠° + الزاوية المصححة عند ١
= ٢٦.٢" ١٣' ٢١٤° - ١٨٠° + (١٠" ٠٥' ١٥٤° – ٤.٨")
= ٣١.٤" ١٨' ١٨٨°

انحراف ٢ ٣ = انحراف ١ ٢ - ١٨٠° + الزاوية المصححة عند ٢
= ٣١.٤" ١٨' ١٨٨° - ١٨٠° + (٥٠" ٢٥' ١٦٨° – ٤.٨")
= ١٦.٦" ٤٤' ١٧٦°

انحراف ٣ ج = انحراف ٢ ٣ - ١٨٠° + الزاوية المصححة عند ٣
= ١٦.٦" ٤٤' ١٧٦° - ١٨٠° + (٣٠" ٠٦' ١٦٦° – ٤.٨")
= ٤١.٨" ٥٠' ١٦٢°

تحقيق:

انحراف ج د = انحراف ٣ ج - ١٨٠° + الزاوية المصححة عند ج
= ٤١.٨" ٥٠' ١٦٢° - ١٨٠° + (٣٠" ٠٠' ١٧٩° + ٤.٨")
= ٠٧" ٥١' ١٦١° = الانحراف المعلوم.

تتكون المرحلة الثالثة من حسابات الترافرس المغلق من حساب مركبات الخطوط (المعادلة ٤-٥ و ٤-٦) كما في الجدول التالي:

الضلع	الطول (ل)	الانحراف (ز)	Δس= ل جا ز	Δص= ل جتا ز
ب ١	٨٤.٠٠	٢١٤° ١٣' ٢٦.٢"	- ٤٧.٢٤٤	- ٦٩.٤٥٥
١ ٢	١٧٣.٠٠	١٨٨° ١٨' ٣١.٤"	- ٢٨.٠٠٠	- ١٧١.١٨٤
٢ ٣	٩٣.٦٥	١٧٦° ٤٤' ١٦.٦"	+ ٩.٣٢٩	- ٩٣.٤٩٨
٣ ج	١٢٧.٨٥	١٦٢° ٥٠' ٤١.٨"	+ ٣٧.٧١٠	- ١٢٢.١٦٢
المجموع	٤٧٨.٥٠	المجموع الجبري	- ٢٩.٢٠٥	- ٤٥٦.٢٩٩
		المجموع المطلق	١١٥.٢٨٣	٤٥٦.٢٩٩

ثم نحسب قيمة مركبات الخطأ الضلعي للترافرس (المعادلة ٤-٢٥ و ٤-٢٦):

Δ $س_{ت}$ = المجموع المطلق Δ س - $س_{ب}$ – $س_{ج}$

= ٧٤.١٨٢ – ٢٩.٢٠٥ – ١٠٤٤.٨٤٦ = + ٠.١٣١ متر

Δ $ص_{ت}$ = المجموع المطلق Δ ص - $ص_{ب}$ – $ص_{ج}$

= ١١٢٥.٠٥٣ – ٤٥٦.٢٩٩ – ٦٦٨.٨٩٥ = - ٠.١٤١ متر

نحسب خطأ القفل الضلعي(المعادلة ٤-٧):

Δ ل = √ (Δ $س_{ت}^{٢}$ + Δ $س_{ت}^{٢}$) = √ ((+٠.١٣١) ^{٢} + (-٠.١٤١) ^{٢}) = ٠.١٩٢ متر

يتم بعد ذلك تحويل خطأ القفل الضلعي إلي خطأ نسبي (المعادلة ٤-٨):

Δ $ل_{٢}$ = Δ ل / مجموع أطوال أضلاع الترافرس = ٠.١٩٢ / ٤٧٨.٥٠ = ١ / ٢٤٨٦

وحيث أن قيمة خطأ القفل الضلعي للترافرس المرصود (٢٤٨٦/١) أقل من ٢٠٠٠/١ فنعتبره مسموحا به.ثم نستخدم طريقة المركبات لتوزيع خطأ القفل الضلعي كما في الجدول التالي:

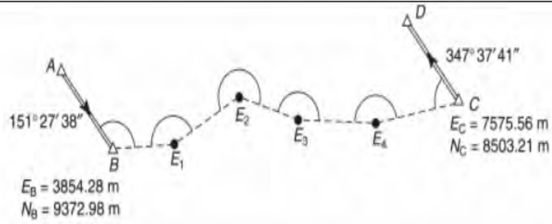
الضلع	Δس	Δص	تصحيح Δس	تصحيحΔص
ب ١	- ٤٧.٢٤٤	- ٦٩.٤٥٥	- ٠.٠٥٤	+ ٠.٠٢١
١ ٢	- ٢٥.٠٠٠	- ١٧١.١٨٤	- ٠.٠٢٨	+ ٠.٠٥٣
٢ ٣	+ ٥.٣٢٩	- ٩٣.٤٩٨	- ٠.٠٠٦	+ ٠.٠٢٩
٣ ج	+ ٣٧.٧١٠	- ١٢٢.١٦٢	- ٠.٠٤٣	+ ٠.٠٣٨
		المجموع الجبري	- ٠.١٣١	= ٠.١٤١
			تحقيق	

الضلع	Δس المصححة	Δص المصححة
ب ١	- ٤٧.٢٩٨	- ٦٩.٤٣٤
١ ٢	- ٢٥.٠٢٨	- ١٧١.١٣١
٢ ٣	+ ٥.٣٢٣	- ٩٣.٤٦٩
٣ ج	+ ٣٧.٦٦٧	- ١٢٢.١٢٤

في الخطوة الأخيرة من حسابات ترافرس الثيودليت يتم حساب الإحداثيات المصححة (النهائية) لكل نقطة من نقاط الترافرس باستخدام المركبات المصححة:

النقطة	الضلع	Δ س المصححة	Δ ص المصححة	س	ص
ب				١٠٧٤.١٨٢	١١٢٥.٠٥٣
	ب ١	- ٤٧.٢٩٨	- ٦٩.٤٣٤		
١				١٠٢٦.٨٨٤	١٠٥٥.٦١٩
	١ ٢	- ٢٥.٠٢٨	- ١٧١.١٣١		
٢				١٠٠١.٨٥٦	٨٨٤.٤٨٨
	٢ ٣	+ ٥.٣٢٣	- ٩٣.٤٦٩		
٣				١٠٠٧.١٧٩	٧٩١.٠١٩
	٣ ج	+ ٣٧.٦٦٧	- ١٢٢.١٢٤		
ج	تحقيق			١٠٤٤.٨٤٦	٦٦٨.٨٩٥

مثال ٢:



Bowditch adjustment of a link traverse

Stns	*Observed angles* ° ′ ″	*Line*	*WCB* ° ′ ″	*Corrn*	*Adjusted WCB* ° ′ ″	*Dist* (m)	*Unadjusted* *E*	*Unadjusted* *N*	*Corrn* *δE*	*Corrn* *δN*	*Adjusted* *E*	*Adjusted* *N*	*Stn*
A		*A–B*	151 27 38		151 27 38		3854.28	9372.98			3854.28	9372.98	*B*
B	143 54 47	*B–E*$_1$	115 22 25	−4	115 22 21	651.16	4442.63	9093.96	+0.03	−0.05	4442.66	9093.91	*E*$_1$
E$_1$	149 08 11	*E*$_1$*–E*$_2$	84 30 36	−8	84 30 28	870.92	5309.55	9177.31	+0.08	−0.11	5309.63	9711.20	*E*$_2$
E$_2$	224 07 32	*E*$_2$*–E*$_3$	128 38 08	−12	128 37 56	522.08	5171.38	8851.36	+0.11	−0.15	5171.49	8851.21	*E*$_3$
E$_3$	157 21 53	*E*$_3$*–E*$_4$	106 00 01	−16	105 59 45	1107.36	6781.87	8546.23	+0.17	−0.22	6782.04	8546.01	*E*$_4$
E$_4$	167 05 15	*E*$_4$*–C*	93 05 16	−20	93 04 56	794.35	7575.35	8503.49	+0.21	−0.28	7575.56	8503.21	*C*
C	74 32 48	*C–D*	347 38 04	−23	347 37 41								
D		*C–D*	347 37 41		Sum =	3945.87	7575.56	8503.21					
Sum	916 10 26	Δ =	+23		Δ′*E*, Δ′*N*		−0.21	+0.28					
Initial bearing	151 27 38												
Total	1067 38 04												
−6 × 180°	1080 00 00												
	−12 21 56												
	+360 00 00												
CD (comp)	347 38 04												
CD (known)	347 37 41												
Δ =	+23												

Error vector $= (0.21^2 + 0.28^2)^{\frac{1}{2}} = 0.35$

Proportional error $= \dfrac{0.35}{3946} = 1/11\,300$

Check

٤-٦ الترافرس المفتوح

لا يستخدم هذا النوع من الترافرس إلا في الأعمال التي لا تتطلب دقة عالية حيث أن الترافرس المفتوح لا يمكن اكتشاف أخطاؤه ولا يمكن تصحيحه. لمحاولة الوصول إلي مصداقية جيدة للترافرس المفتوح فيجب أن يتم رصده بالكامل مرتين علي الأقل ومن الأفضل أن يتم ذلك بواسطة راصدين مختلفين. تعتمد حسابات الترافرس المفتوح علي حساب إحداثيات كل نقطة مرتين (من مجموعتي الأرصاد) ونقارن بينهما فان كان الخطأ في حدود المسموح به فنحسب متوسط الإحداثيات لكل نقطة.

المسموح به (بالثواني) في خطأ القفل الزاوي = ٢ و √ ٢ن (٤-٢٩)

حيث:

و دقة الثيودليت المستخدم بالثواني

ن عدد الزوايا المرصودة

المسموح به (بالسنتيمتر) في الفرق بين إحداثيات المجموعتين لنفس النقطة

= ٢٥ + ٠.٠٦٢ ل + ١.١٣ √ ٢ ل (٤-٣٠)

حيث:

ل طول ضلع الترافرس.

<u>مثال:</u>

قام راصدان بأخذ الأرصاد التالية لترافرس مفتوح ب ج د يربط علي الخط أ ب الذي يبلغ انحرافه ١٦٢° ١٢'. عين إحداثيات النقطتين ج ، د في هذا الترافرس علما بأن إحداثيات النقطة ب هي ١٠٠ غربا و ٢٥٠ جنوبا.

النقطة	الضلع	الطول (متر)		الزاوية في اتجاه عقرب الساعة	
		الراصد الأول	الراصد الثاني	الراصد الأول	الراصد الثاني
ب				١٣١° ٤٢' ٣٦"	١٣١° ٤١' ٥٤"
	ب ج	١٢٠.١٢	١٢٠.٤٤		
ج				٦٤° ١١' ٠٠"	٦٤° ١٠' ٤٨"
	ج د	٧٨.٤٨	٧٨.٣٠		

لحساب انحرافات أضلاع الترافرس:

انحراف ب ج للراصد الأول = ١٦٢° ١٢' + ١٨٠° + ١٣١° ٤٢' ٣٦" - ٣٦٠°

= ١١٣° ٥٤' ٣٦"

انحراف ب ج للراصد الثاني = ١٢' ١٦٢° + ١٨٠° + ٥٤" ٣١' ١٣١° - ٣٦٠°
= ٥٤" ٥٣' ١١٣°

الفرق بين نتائج الراصدين للخط ب ج = ٣٦" ٥٤' ١١٣° - ٥٤" ٥٣' ١١٣°
= ٤٢"

المسموح به (بالثواني) في خطأ القفل الزاوي = ٢ و √ ٢ن
= ٢ × ٣٠" √ (٢×١) = ٨٤.٨٥"

أي أن الخطأ الزاوي مسموحا به.

بالمثل فأن:

انحراف ج د للراصد الأول = ٣٦" ٠٥' ٣٥٨°
انحراف ج د للراصد الثاني = ٤٢" ٠٤' ٣٥٨°

الفرق = ٥٤ "

المسموح به (بالثواني) في خطأ القفل الزاوي = ٢ و √ ٢ن
= ٢ × ٣٠" √ (٢×٢) = ١٢٠"

أي أن الخطأ الزاوي مسموحا به أيضا.

نحسب مركبات الأضلاع لكلا الراصدين:

الضلع	المركبة الأفقية		المركبة الرأسية	
	للراصد الأول	للراصد الثاني	للراصد الأول	للراصد الثاني
ب ج	+ ١٠٩.٨١	+ ١١٠.١١	- ٤٨.٦٨	- ٤٨.٧٩
ج د	- ٢.٦٢	- ٢.٥٣	+ ٧٨.٤٤	+ ٧٨.٢٦

خطأ المركبة الأفقية للضلع ب ج = + ١٠٩.٨١ – ١١٠.١١ = - ٠.٣٠ متر

خطأ المركبة الرأسية للضلع ب ج = - ٤٨.٦٨ – (-٣٨.٧٩) = + ٠.١١ متر

خطأ القفل الضلعي للخط ب ج = √ (-٠.٣٠ ^٢^ + ٠.١١ ^٢^) = ٠.٣٢ متر

المسموح به لإحداثيات النقطة ج = ٢٥ + ٠.٠٦٢ × ١٢٠ + ١.١٣ √ (٢×١٢٠)
= ٤٩.٩٥ سنتيمتر

أي أن الخطأ في إحداثيات ج في حدود المسموح به.

خطأ المركبة الأفقية للضلع ج د = - ٢.٦٢ – (-٢.٦٣) = + ٠.٠١ متر

خطأ المركبة الرأسية للضلع ج د = + ٧٨.٤٤ – (٧٨.٢٦) = + ٠.١٨ متر

خطأ المركبة الأفقية عند د = خطأ المركبة الأفقية عند ج + خطأ المركبة الأفقية للخط ج د
= - ٠.٣٠ + ٠.٠١ = - ٠.٢٩ متر

خطأ المركبة الرأسية عند د = خطأ المركبة الرأسية عند ج +خطأ المركبة الرأسية للخط ج د
= + ٠.١١ + ٠.١٨ = + ٠.٢٩ متر

خطأ القفل الضلعي عند النقطة د = √ (-٠.٢٩ ^٢^ + ٠.٢٩ ^٢^) = ٠.٤١ متر

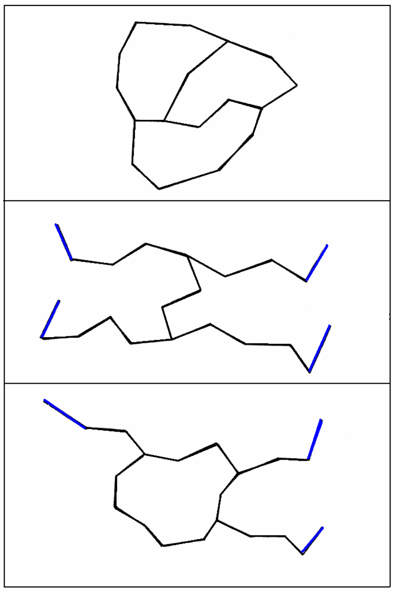
المسموح به لإحداثيات النقطة د = ٢٥ + ٠.٠٦٢ × (١٢٠+٧٨) +
١.١٣ √ (٢×(١٢٠+٧٨)) = ٥٩.٧٦ سنتيمتر

أي أن الخطأ في إحداثيات د في حدود المسموح به أيضا.
طالما أن الخطأ مسموحا به فنحسب إحداثيات النقاط كمتوسط للإحداثيات المحسوبة من واقع أرصاد الراصدين:

الخط	الراصد الأول		الراصد الثاني		المتوسط	
	س	ص	س	ص	س	ص
ب	-١٠٠	-١٥٠	-١٠٠	-١٥٠	-١٠٠	-١٥٠
ب ج	+١٠٩.٨١	- ٤٨.٦٨	+١١٠.١١	-٤٨.٧٩		
ج	+٩.٨١	-١٩٨.٦٨	+١٠.١١	-١٩٨.٧٩	+٩.٩٦	-١٩٨.٧٣٥
ج د	-٢.٦٢	+٧٨.٤٤	-٢.٦٣	+٧٨.٢٦		
د	+٧.١٩	-١٢٠.٢٤	+٧.٤٨	-١٢٠.٥٣	+٧.٣٣٥	-١٢٠.٣٨٥

٤-٧ شبكات الترافرس

عند رفع منطقة جغرافية شاسعة فربما لا يكفي إنشاء ترافرس واحد يغطي المنطقة كلها ، وهنا يلجأ الراصد إلي إنشاء مجموعات أو حلقات من الترافرس تكون معا ما يعرف بشبكة الترافرس. قد تكون شبكة الترافرس مكونة من عدة حلقات (ترافرسات) مغلقة أو من ترافرسات مغلق مع ترافرسات موصلة. مرة أخري فأننا نتجنب الترافرس المفتوح في الأعمال المساحية التي تتطلب دقة عالية.



شكل (٤-١١) شبكة الترافرس

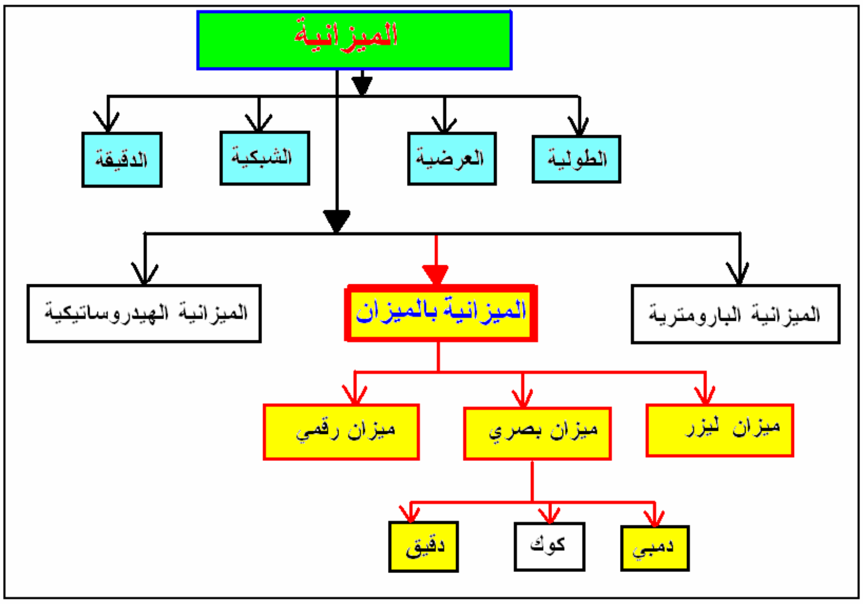
تتشابه أعمال الرصد و الرفع المساحي لشبكة ترافرس من تلك الخطوات المعتادة في إنشاء الترافرس المغلق أو الموصل ، إلا أنها قد تختلف في الأعمال المكتبية و الحسابات للوصول إلي الإحداثيات المضبوطة لجميع نقاط الشبكة. توجد عدة طرق حسابية لشبكة الترافرس (مثل طريقة بوبوف) إلا أن المستخدم حاليا ومع توافر أجهزة الحاسبات الآلية وبرامجها المتخصصة أن يتم استخدام طرق ضبط الشبكات Network Adjustment للوصول لدقة عالية في حساب إحداثيات نقاط الشبكة (أنظر الفصول القادمة).

الفصل الخامس

الميزانية

٥-١ مقدمة

الميزانية (أو التسوية) من أهم تطبيقات علم المساحة في كافة المشروعات المدنية و العسكرية علي الأرض، فهي أساس العمل المساحي في تنفيذ مشروعات البناء و الجسور و الكباري و الطرق و السكك الحديدية والترع و المصارف والسدود وتسوية الأراضي ... الخ. والميزانية هي العملية المساحية التي من خلالها يتم تحديد ارتفاع أي نقطة عن متوسط منسوب سطح البحر. تنقسم الميزانية إلي نوعين رئيسيان: (١) ميزانية مباشرة أو ميزانية هندسية Direct or Spirit Levelling ، (٢) ميزانية غير مباشرة مثل الميزانية البارومترية و الميزانية الهيدروستاتيكية و الميزانية المثلثية. كما تنقسم الميزانية المباشرة من حيث أسلوب تنفيذها في الطبيعة إلي ميزانية طولية (في اتجاه طولي مثل محور طريق) و عرضية (مثل قطاعات عرضية علي المحور الأساسي للمشروع) و شبكية (تغطي منطقة من الأرض) ، وفي حالة الوصول لدقة عالية في تحديد فروق المناسيب (باستخدام أجهزة خاصة عالية الدقة) فتسمي الميزانية بالميزانية الدقيقة.



شكل (٥-١) الميزانية

٥-٢ حسابات الميزانية المباشرة

توجد طريقتين لحساب فرق المنسوب بين نقطتين تم إجراء ميزانية (طولية) بينهما باستخدام الميزان البصري العادي: طريقة سطح الميزان و طريقة الارتفاع و الانخفاض. أما الميزان الالكتروني أو الرقمي فلديه إمكانيات لإتمام الحسابات داخل برنامج الحاسب الآلي الخاص به. فإذا علمنا منسوب النقطة الأولي BM فيتم حساب منسوب النقطة (أو النقاط) المطلوبة. إن لم منسوب نقطة البداية معلوما فيمكن فرض قيمة له لتتم الحسابات بها (ما يطلق عليه أسم الصفر الخاص لهذا المشروع).

٥-٢-١ طريقة سطح الميزان

في هذه الطريقة يتم حساب منسوب نقطة القامة الأمامية كالآتي:

منسوب سطح الميزان = منسوب النقطة الخلفية (المعلومة) + قراءتها الخلفية (٥-١)

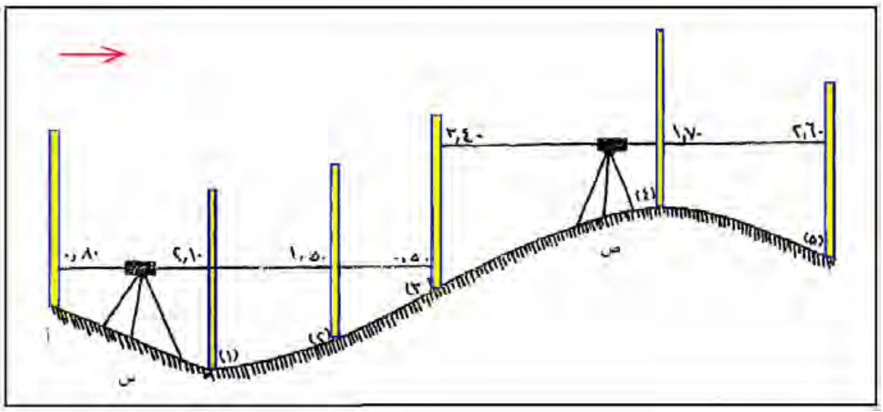
منسوب النقطة الأمامية = منسوب سطح الميزان - قراءتها الأمامية (٥-٢)

وبعد حساب منسوب النقطة الأمامية فتكون قد تحولت إلي نقطة معلومة المنسوب ويتم استخدامها كنقطة خلفية معلومة للنقطة التالية ، وهكذا.

التحقيق الحسابي في نهاية الميزانية:

منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات (٥-٣)

مثال ١:
بدأت ميزانية طولية من نقطة أ المعلوم منسوبها (١٠.٥٠ متر) ووضع الميزان عند نقطة س و أخذت القراءات ١ ، ٢ ، ٣ ثم أنتقل الميزان للنقطة ص ،أخذت القراءات عند ٣ ، ٤ ، ٥.
أحسب مناسيب جميع النقاط.



شكل (٥-٢) مثال ١ للميزانية طولية

منسوب سطح الميزان عند س = منسوب النقطة الخلفية (المعلومة) + القراءة الخلفية
= ١٠.٥٠ + ٠.٨٠ = ١١.٣٠ متر

منسوب النقطة الأمامية عند ١ = منسوب سطح الميزان - قراءتها الأمامية
= ١١.٣٠ – ٢.١٠ = ٩.٢٠ متر

منسوب النقطة الأمامية عند ٢ = منسوب سطح الميزان - قراءتها الأمامية
= ١١.٣٠ – ١.٥٠ = ٩.٨٠ متر

منسوب النقطة الأمامية عند ٣ = منسوب سطح الميزان - قراءتها الأمامية
= ١١.٣٠ – ٠.٥٠ = ١٠.٨٠ متر

الآن أصبحت النقطة ٣ معلومة المنسوب وأنتقل الميزان إلي النقطة ص:

منسوب سطح الميزان عند ص = منسوب النقطة الخلفية (٣) + القراءة الخلفية
= ١٠.٨٠ + ٣.٤٠ = ١٤.٢٠ متر

منسوب النقطة الأمامية عند ٤ = منسوب سطح الميزان - قراءتها الأمامية
= ١٤.٢٠ – ١.٧٠ = ١٢.٥٠ متر

منسوب النقطة الأمامية عند ٥ = منسوب سطح الميزان - قراءتها الأمامية
= ١٤.٢٠ – ٢.٦٠ = ١١.٦٠ متر

غالبا تتم حسابات الميزانية في الطبيعة وفي نفس دفتر تسجيل الأرصاد كالتالي:

النقطة	قراءات القامة			منسوب سطح الميزان	المنسوب	ملاحظات
	خلفية	متوسطة	أمامية			
أ	٠.٨٠			١١.٣٠	١٠.٥٠	نقطة روبير
١		٢.١٠			٩.٢٠	
٢		١.٥٠			٩.٨٠	
٣	٣.٤٠		٠.٥٠	١٤.٢٠	١٠.٨٠	نقطة دوران
٤		١.٧٠			١٢.٥٠	
٥			٢.٦٠		١١.٦٠	
المجموع	٤.٢٠		٣.١٠			

التحقيق الحسابي في نهاية الميزانية:

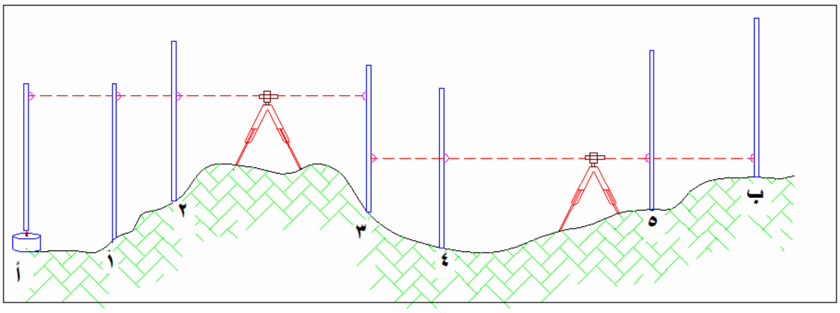
منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات

منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = ١١.٦٠ – ١٠.٥٠ = ١.١٠ متر

مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات = ٤.٢٠ – ٣.١٠ = ١.١٠ متر

إذن العمل سليم.

مثال ٢:



شكل (٥-٣) مثال ٢ للميزانية طولية

النقطة	قراءات القامة			منسوب سطح الميزان	المنسوب	ملاحظات
	خلفية	متوسطة	أمامية			
أ	٣.٢٥			٥٥٣.٤٢	٥٥٠.١٧	نقطة روبير
١		٣.٠٠			٥٥٠.٤٢	
٢		٢.٨٥			٥٥٠.٥٧	
٣	١.٨٢		٢.٧٥	٥٥٢.٤٩	٥٥٠.٦٧	نقطة دوران
٤		٢.١٣			٥٥٠.٣٦	
٥		٠.٧٨			٥٥١.٧١	
ب			٠.٦٨		٥٥١.٨١	نقطة روبير
المجموع	٥.٠٧		٣.٤٣			

التحقيق الحسابي في نهاية الميزانية:

منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات

منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = ٥٥١.٨١ – ٥٥٠.١٧ = ١.٦٤ متر

مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات = ٥.٠٧ – ٣.٤٣ = ١.٦٤ متر

إذن العمل سليم.

٥-٢-٢ طريقة الارتفاع و الانخفاض

تعتمد هذه الطريقة علي مقارنة كل نقطة بالنقطة السابقة لها (في الميزانية الطولية) ومعرفة قيمة الارتفاع أو الانخفاض عنها. كلما زادت قراءة القامة كان ذلك دليلا علي انخفاض النقطة عن النقطة السابقة لها وكلما قلت قراءة القامة دل ذلك علي ارتفاع النقطة المقارنة.

فرق الارتفاع بين نقطتين = قراءة القامة الخلفية – قراءة القامة الأمامية (٥-٤)

منسوب النقطة الأمامية = منسوب النقطة الخلفية + فرق الارتفاع (٥-٥)

التحقيق الحسابي في نهاية الميزانية:

مجموع الارتفاعات = مجموع الانخفاضات
= منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة
= مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات (٥-٦)

في المثال السابق (شكل ٥-٢):

فرق الارتفاع بين النقطتين أ - ١ = ٠.٨٠ – ٢.١٠ = - ١.٣٠ متر

منسوب النقطة ١ = منسوب النقطة أ + فرق الارتفاع بينهما
= ١٠.٥٠ + (-١.٣٠) = ١٠.٥٠ - ١.٣٠ = ٩.٢٠ متر

فرق الارتفاع بين النقطتين ١ - ٢ = ٢.١٠ – ١.٥٠ = + ٠.٦٠ متر

منسوب النقطة ٢ = منسوب النقطة ١ + فرق الارتفاع بينهما
= ٩.٢٠ + ٠.٦٠ = ٩.٨٠ متر

فرق الارتفاع بين النقطتين ٢ - ٣ = ١.٥٠ – ٠.٥٠ = + ١.٠٠ متر

منسوب النقطة ٣ = منسوب النقطة ٢ + فرق الارتفاع بينهما
= ٩.٨٠ + ١.٠٠ = ١٠.٨٠ متر

فرق الارتفاع بين النقطتين ٣ - ٤ = ٣.٤٠ – ١.٧٠ = + ١.٧٠ متر

منسوب النقطة ٤ = منسوب النقطة ٣ + فرق الارتفاع بينهما
= ١٠.٨٠ + ١.٧٠ = ١٢.٥٠ متر

فرق الارتفاع بين النقطتين ٤ - ٥ = ١.٧٠ – ٢.٦٠ = - ٠.٩٠ متر

منسوب النقطة ٥ = منسوب النقطة ٤ + فرق الارتفاع بينهما
= ١٢.٥٠ + (- ٠.٩٠) = ١٢.٥٠ – ٠.٩٠ = ١١.٦٠ متر

ويكون جدول الأرصاد و الحسابات كالتالي:

النقطة	قراءات القامة			فرق الارتفاع	المنسوب	ملاحظات
	خلفية	متوسطة	أمامية			
أ	٠.٨٠				١٠.٥٠	نقطة روبير
١		٢.١٠		- ١.٣٠	٩.٢٠	
٢		١.٥٠		+ ٠.٦٠	٩.٨٠	
٣	٣.٤٠		٠.٥٠	+ ١.٠٠	١٠.٨٠	نقطة دوران
٤		١.٧٠		+ ١.٧٠	١٢.٥٠	
٥			٢.٦٠	- ٠.٩٠	١١.٦٠	
المجموع	٤.٢٠		٣.١٠			

التحقيق الحسابي:

مجموع الارتفاعات - مجموع الانخفاضات =
= منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة
= مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات

مجموع الارتفاعات = ٠.٦٠ + ١.٠٠ + ١.٧٠ = ٣.٣٠ متر

مجموع الانخفاضات = ١.٣٠ + ٠.٩٠ = ٢.٢٠ متر

مجموع الارتفاعات – مجموع الانخفاضات = ٣.٣٠ = ٢.٢٠ = ١.١٠ متر

منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = ١١.٦٠ – ١٠.٥٠ = ١.١٠ متر

مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات = ٤.٢٠ – ٣.١٠ = ١.١٠ متر

إذن العمل سليم.

مثال ٢:

حسابات الميزانية في الشكل (٥-٣):

النقطة	قراءات القامة			فرق الارتفاع	المنسوب	ملاحظات
	خلفية	متوسطة	أمامية			
أ	٣.٢٥				٥٥٠.١٧	
١		٣.٠٠		+ ٠.٢٥	٥٥٠.٤٢	
٢		٢.٨٥		+ ٠.١٥	٥٥٠.٥٧	
٣	١.٨٢		٢.٧٥	+ ٠.١٠	٥٥٠.٦٧	
٤		٢.١٣		- ٠.٣١	٥٥٠.٣٦	
٥		٠.٧٨		+ ١.٣٥	٥٥١.٧١	
ب			٠.٦٨	+ ٠.١٠	٥٥١.٨١	

التحقيق الحسابي:

مجموع الارتفاعات – مجموع الانخفاضات = ١.٦٤ متر

منسوب آخر نقطة – منسوب أول نقطة = ١.٦٤ متر

مجموع المؤخرات – مجموع المقدمات = ١.٦٤ متر

إذن العمل سليم.

٥-٢-٣ حساب خطأ الميزانية

توجد عدة طرق لتقدير قيمة الخطأ في أرصاد الميزانية الطولية ومقارنته بالحدود المسموح بها لقبول أو رفض (إعادة رصد) الميزانية. تشمل هذه الطرق: (١) قفل أو إنهاء الميزانية علي نقطة معلومة المنسوب BM إن كان متوافرا بمنطقة العمل ، (٢) تنفيذ الميزانية مرتين أحدهما ذهابا والآخر إيابا في حالة عدم توافر روبير في نهاية الميزانية.

في حالة توافر روبير في نهاية الميزانية:

خطأ الميزانية = المنسوب المعلوم للروبير الأخير –
منسوبه المحسوب من أرصاد الميزانية (٥-٥)

في حالة عدم توافر روبير في نهاية الميزانية:

خطأ الميزانية = المنسوب المعلوم للروبير الأول –
منسوبه المحسوب من أرصاد الميزانية في خط الإياب (٥-٦)

أو يمكن حسابه بصورة أخري:

خطأ الميزانية = فرق الارتفاع بين طرفي خط الذهاب –
فرق الارتفاع بين طرفي خط الإياب (٥-٧)

أما الحدود المسموح بها في الميزانية العادية فتعتمد علي طول خط الميزانية. من أسهل طرق الحصول طول خط الميزانية إما باستخدام الشريط في قياس المسافة بين كل خلفية و أمامية ثم جمع هذه المسافات لحساب الطول الإجمالي للميزانية. أيضا يمكن حساب المسافة بين الم\يزان وأي قامة (سواء الخلفية أو الأمامية) في حالة تسجيل قراءة الشعرتين العليا و السفلي (شعرات الاستاديا) في كل قراءة قامة ثم حساب المسافة:

المسافة بين الميزان و القامة = (قراءة الشعرة العليا – قراءة الشعرة السفلي)
× ثابت الميزان (٥-٨)

حيث ثابت الميزان غالبا = ١٠٠ وان كان يجب التأكد من ذلك لكل ميزان مستخدم وذلك من الكتالوج الخاص به.

يتم حساب المسافة بين الميزان والقامة الخلفية و المسافة بين الميزان والقامة الأمامية عند كل وقفة ميزان ، ثم يتم جمع جميع المسافات للحصول علي الطول الكلي لخط الميزانية والذي يستخدم لحساب قيمة الخطأ المسموح به:

الخطأ المسموح به بالمليمتر = ن √ ك (٥-٩)

حيث:

ك طول خط الميزانية بالكيلومتر
ن ثابت يعتمد علي نوع و دقة الميزانية المطلوبة

تعتمد قيمة الثابت (ن) علي المواصفات الفنية التي تحددها الجهة المسئولة عن المساحة في بلد ما أو علي مواصفات المشروع المساحي ذاته. فعلي سبيل المثال فأن الهيئة العامة للمساحة المصرية تعتمد قيم الثابت (ن) كالتالي:

ن = ٤ لميزانية الدرجة الأولي (لحلقات الميزانية)
ن = ٥ لميزانية الدرجة الأولي (لخط الميزانية)
ن = ٨ لميزانية الدرجة الثانية
ن = ١٢ لميزانية الدرجة الثالثة

في المثال السابق تم قياس المسافات بالشريط وتسجيلها في دفتر الأرصاد كالتالي:

النقطة	قراءات القامة			فرق الارتفاع	المنسوب	المسافة بالمتر
	خلفية	متوسطة	أمامية			
أ	٠.٨٠				١٠.٥٠	صفر
١		٢.١٠		- ١.٣٠	٩.٢٠	٣٥
٢		١.٥٠		+ ٠.٦٠	٩.٨٠	٣١
٣	٣.٤٠		٠.٥٠	+ ١.٠٠	١٠.٨٠	١٩
٤		١.٧٠		+ ١.٧٠	١٢.٥٠	٣٧
٥			٢.٦٠	- ٠.٩٠	١١.٦٠	٤٢
المجموع	٤.٢٠		٣.١٠			١٦٤ متر ٠.١٦٤ كيلومتر

فان كانت الميزانية في هذا المثال من الدرجة الأولي فأن:

الخطأ المسموح به بالمليمتر = ٥ √ ك = ٥ (√ ٠.١٦٤) = ٢.٠٢ ملليمتر

وان كانت الميزانية في هذا المثال من الدرجة الثانية فأن:

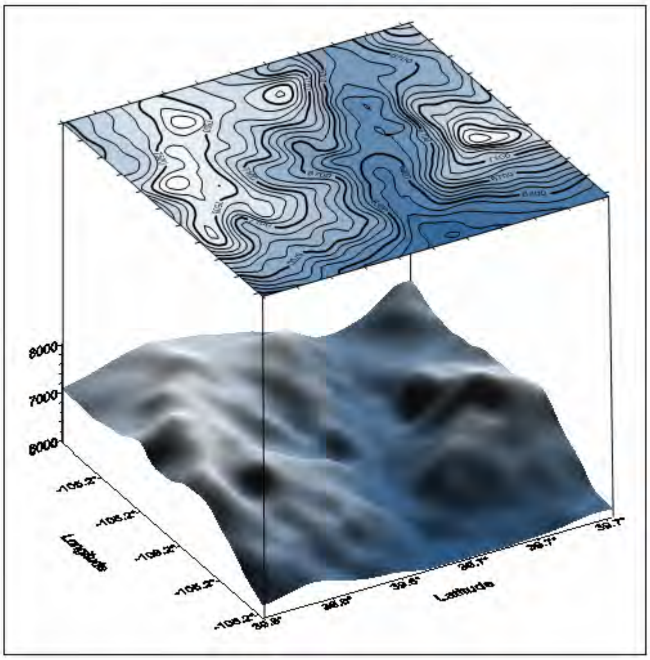
الخطأ المسموح به بالمليمتر = ٨ √ ك = ٨ (√ ٠.١٦٤) = ٣.٢٤ ملليمتر

وان كانت الميزانية في هذا المثال من الدرجة الثالثة فأن:

الخطأ المسموح به بالمليمتر = ١٢ √ ك = ١٢ (√ ٠.١٦٤) = ٤.٨٦ ملليمتر

٥-٣ الميزانية الشبكية

الهدف من الميزانية الشبكية هو تحديد مناسيب مجموعة من النقاط في منطقة جغرافية معينة ، أي أنها يمكن تخيلها أنها مجموعة من خطوط الميزانيات الطولية و العرضية التي تكون شبكة فيما بينها ومن هنا جاء اسم الميزانية الشبكية. من خلال قياس فروق المناسيب بين هذه النقاط يمكن رسم خريطة (أو خرائط) لتضاريس الأرض في هذه المنطقة لاستخدامها في حساب كميات الحفر أو الردم اللازمة لمشروع هندسي معين. أهم تلك الخرائط المساحية - الناتجة عن الميزانية الشبكية - هي المعروفة باسم الخريطة الكنتورية حيث خط الكنتور هو الخط الوهمي الذي يصل بين مجموعة من النقاط التي لها نفس المنسوب.



شكل (٥-٣) خطوط الكنتور

توجد عدة برامج حاسب إلي software لعمل الخريطة الكنتورية مثل برنامج Surfer وبرنامج Global Mapper وأيضا إمكانيات الكنتور في برامج نظم المعلومات الجغرافية مثل برنامج Arc GIS (أنظر المراجع للحصول علي ملفات تدريبية لاستخدام هذه البرامج في تطوير الخرائط الكنتورية).

يمكن تنفيذ الميزانية الشبكية باستخدام عدة أنواع من الأجهزة المساحية لكن سيتم في هذا الجزء فقط تناول كيفية استخدام الميزان. طريقة الرصد و الحساب في الميزانية الشبكية لا تختلف عن تلك في الميزانية العرضية لكن توجد عدة طرق حقلية لتنفيذ الجانب العملي للميزانية الشبكية ومنها:

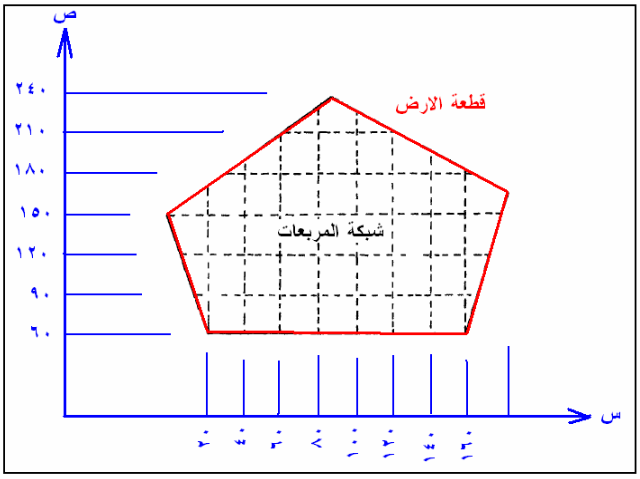
(أ) طريقة القطاعات الطولية و العرضية:

يتم تنفيذ عدة خطوط ميزانية طولية و عرضية تغطي منطقة العمل المطلوبة بنفس خطوات الميزانية الطولية العادية. يتم تحديد الإحداثيات الأفقية لبداية و نهاية كل خط ميزانية باستخدام الثيودليت كما في حالة إنشاء مضلع رئيسي السابق شرحها ، أما إحداثيات نقاط الميزانية علي مسار كل خط ميزانية طولية فيمكن توقيعها باستخدام المسافات المقاسة علي الميزانية الطولية من نقطة بدايتها إلي النقطة المرصودة. بهذه الطريقة سيمكن الحصول – في نهاية العمل الحقلي – علي الإحداثيات الأفقية و أيضا المنسوب لكل نقطة مما يمكننا من رسم الخريطة الكنتورية لاحقا.

(ب) طريقة المربعات أو المستطيلات:

المربعات هي أسهل طرق تنفيذ الميزانية الشبكية لقطعة أرض صغيرة المساحة ولا يوجد بها اختلافات كبيرة في مناسيبها أو تضاريسها. يتم تغطية الأرض بشبكة من المربعات (أو

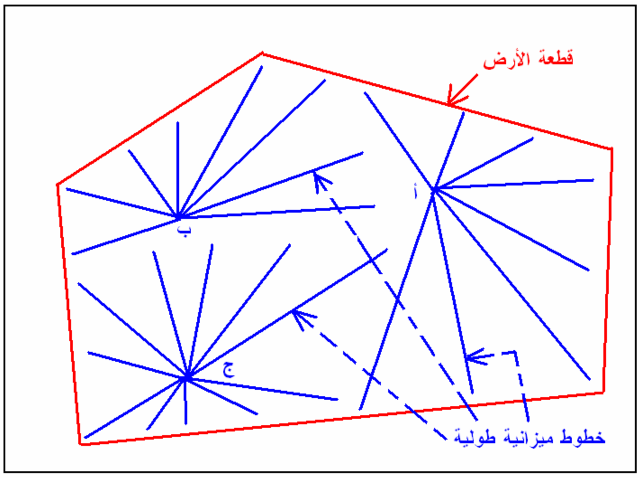
المستطيلات) في الحقل باستخدام مادة الجير الأبيض (تسمي هذه الخطوة في مصر باسم تجبير الأرض). لتحديد الإحداثيات الأفقية لرؤوس الشبكة يتم استخدام الثيودليت لإنشاء مضلع رئيسي – ترافرس – بدءا من نقطة معلومة الإحداثيات. في حالة عدم توفر نقطة ثوابت أرضية بالقرب من منطقة العمل فيمكن استخدام إحداثيات وهمية لرؤوس المربعات من خلال فرض قيم إحداثيات معينة (صفر ، صفر مثلا) لأحد أركان الشبكة ، ومن خلال معرفة طول ضلع المربع يتم استنتاج إحداثيات باقي نقاط الشبكة. يقوم جهاز الميزان بالوقوف في نقطة متوسطة من قطعة الأرض ثم يبدأ في رصد القامة المثبتة علي النقطة المعلوم منسوبها (في حالة توافر BM في منطقة العمل) ثم تتحرك القامة (أو مجموعة القامات) لرصد فرق ارتفاع جميع رؤوس مربعات الشبكة تباعا. في حالة أن حدود قطعة الأرض لا تنطبق تماما علي حدود شبكة المربعات فيتم رصد فرق المنسوب عند نقاط أركان الأرض أيضا. بهذا الأسلوب سينتج الإحداثيات الثلاثية (س ، ص ، المنسوب) لجميع نقاط شبكة المربعات والتي ستستخدم في إنشاء الخريطة الكنتورية. يعتمد تحديد طول ضلع المربع (أو أبعاد المستطيل) عند إنشاء الشبكة علي طبيعة تضاريس الأرض وأيضا علي قيمة الفترة الكنتورية اللازمة لإنشاء الخريطة الكنتورية.



شكل (٥-٤) الميزانية الشبكية بطريقة المربعات

<u>(ج) طريقة الإشعاع:</u>

تستخدم طريقة الإشعاع في المناطق المرتفعة أو التلال حيث يتم تنفيذ عدة ميزانيات طولية علي عدد من الخطوط الإشعاعية التي تبدأ من أعلي نقطة في منطقة العمل (قمة التل). لتحديد اتجاهات هذه الخطوط الإشعاعية يتم استخدام البوصلة لقياس الانحراف المغناطيسي لكل شعاع (حتى يمكن توقيعه لاحقا علي الخريطة). أيضا يمكن استخدام الثيودليت لتحديد الإحداثيات الأفقية لنقطة قمة التل و نقاط نهاية كل اتجاه شعاعي. بعد ذلك تبدأ خطوات الميزانية الطولية علي مسار كل اتجاه شعاعي من هذه الأشعة. في حالة أن نقطة قمة التل لا تغطي حدود كل منطقة العمل فيمكن نقل الميزان إلي أكثر من نقطة مع ربط هذه النقاط بمضلع حتى يمكن توقيعها علي الخريطة ، ونكون مجموعة من الأشعة عند كل نقطة حتى يتم تغطية كامل منطقة المشروع. يتعمد اختيار المسافات بين الخطوط الإشعاعية و كذلك المسافات بين النقاط في كل خط علي طبيعة تضاريس الأرض ، فكلما زاد انحدار الأرض نقلل من المسافة بين كل خط إشعاعي و آخر وكذلك نقلل المسافة بين النقاط المرصودة (نقاط القامة) علي مسار الخط حتى نحصل علي تمثيل جيد لطبيعة تضاريس الأرض بمنطقة العمل.



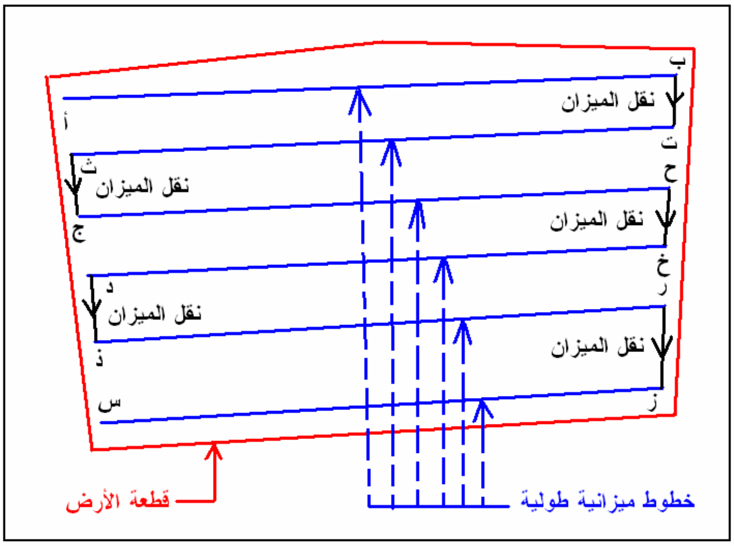
شكل (٥-٥) الميزانية الشبكية بطريقة الإشعاع

د) طريقة النقاط المتفرقة:

تشبه طريقة النقاط المتفرقة (أو النقاط المبعثرة) طريقة الإشعاع حيث يتم رصد فروق المناسيب عند مجموعة من النقاط التي تغطي منطقة العمل دون الالتزام بمسار خط إشعاعي معين. طبقا لطبيعة تضاريس الأرض في منطقة المشروع يقوم الراصد بتحديد عدد و أماكن هذه النقاط المرصودة (نقاط القامة) بحيث يتم الحصول علي تمثيل جيد و دقيق لطبوغرافية سطح الأرض بالمنطقة ، أي أن طريقة النقاط المتفرقة تعتمد علي خبرة الراصد. تستخدم البوصلة (أو الثيودليت) في تحديد الإحداثيات الأفقية (س ، ص) لكل نقطة مرصودة (نقاط القامة). غالبا تستخدم طريقة النقاط المتفرقة عند استخدام أسلوب الرفع التاكيومتري سواء بجهاز الثيودليت أو بجهاز المحطة الشاملة (أنظر لاحقا).

ذ) طريقة خط السير:

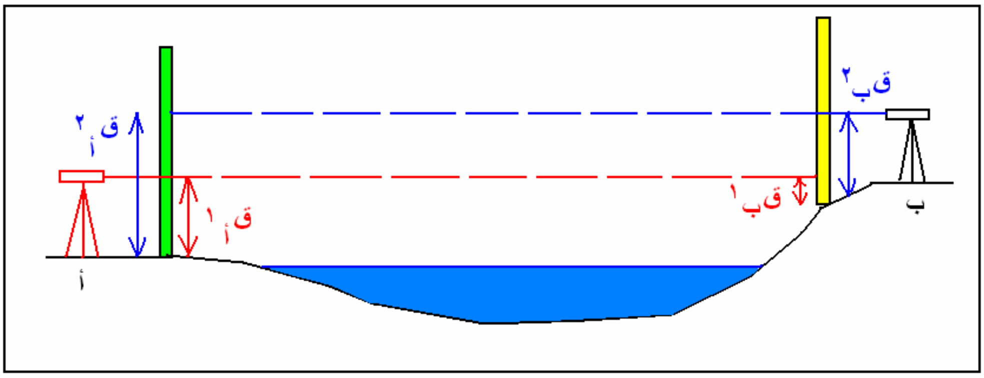
تعتمد هذه الطريقة علي تنفيذ عدد من خطوط الميزانية الطولية المتوازية بامتداد أحد أضلاع منطقة العمل ، خاصة إن كانت الأرض تأخذ شكل المستطيل تقريبا. يتم استخدام البوصلة أو الثيودليت لتوقيع خطوط السير (الإحداثيات الأفقية لبداية و نهاية كل خط) ، ويعتمد اختيار عدد الخطوط والمسافة بين نقاط القامة في كل خط علي طبيعة تضاريس و طبوغرافية منطقة المشروع ذاتها. في الشكل التالي يبدأ خط الميزانية الطولية الأول من نقطة أ إلي نقطة ب ثم ينتقل الميزان ليبدأ خط الميزانية الطولية الثاني الذي يبدأ من نقطة ت و يستمر حتى نقطة ث ثم ينتقل ليبدأ خط الميزانية الطولية الثالث الذي يبدأ من نقطة ج يصل إلي نقطة ح ... وهكذا حتى يتم الانتهاء من رصد جميع خطوط السير (خطوط الميزانية الطولية). إن كانت طبيعة الأرض لا تسمح بتنفيذ خطوط السير بحيث تكون متوازية فيمكن العمل في أية خطوط مع استخدام البوصلة أو الثيودليت لتحديد الإحداثيات الأفقية لبداية و نهاية كل خط سير.



شكل (٥-٦) الميزانية الشبكية بطريقة خطوط السير

٥-٤ الميزانية العكسية

من مواصفات إجراء الميزانية الطولية أن يكون الميزان – بقدر الإمكان – في منتصف المسافة بين القامة الأمامية و القامة الخلفية. فان لم يتحقق هذا الشرط فأن الميزانية ستتعرض لتأثير أن خط النظر سيكون مائلا وأيضا ستتعرض لتأثير تكور سطح الأرض. في هذه الحالة ننفذ الميزانية العكسية والتي تتمثل في إجراء ميزانيتين مختلفتين في الاتجاه (ومن هنا جاء أسم الميزانية العكسية). من أمثلة هذا الوضع أننا نريد قياس فرق المنسوب بين نقطتين علي جانبي نهر أو مجري مائي حيث لا يمكن وضع الميزان في منتصف المسافة. نضع الميزان في أحد جانبي النهر (أو أيا كان المشروع) ونأخذ قراءتي قامة أحداهما نفس جانب النهر و الأخرى علي الجهة المقابلة من النهر. ثم ننقل الميزان للضفة الأخرى من النهر ونكرر نفس العمل ونأخذ القراءات علي نفس القامتين (دون أن يتحركا من مكانهما). نحسب فرق المنسوب من كلا وضعي الميزان ثم نحسب متوسطهما ليكون هو فرق المنسوب بين النقطتين.



شكل (٥-٧) الميزانية العكسية

<u>مثال:</u>

أجريت الميزانية العكسية بين النقطتين أ ، ب. وضع الميزان قريبا من نقطة أ وكانت قراءة القامة عند أ تساوي ١.٤٨٣ مت وعند ب تساوي ٠.٧٦٤ متر. ثم وضع الميزان قريبا من نقطة ب فكانت قراءة القامة عند أ ١.٨٢٤ متر وعند ب ١.١١٢. أوجد منسوب نقطة ب إذا علمت أن منسوب أ يبلغ ١٢.٤٣٦ مترا.

فرق المنسوب من الوضع الأول = ١.٤٨٣ – ٠.٧٦٤ = ٠.٧١٩ متر

فرق المنسوب من الوضع الثاني = ١.٨٢٤ – ١.١١٢ = ٠.٧١٢ متر

فرق المنسوب المتوسط = (٠.٧١٩ + ٠.٧١٢) / ٢ = ٠.٧١٥٥ متر

منسوب نقطة ب = منسوب أ + فرق المنسوب المتوسط
= ١٢.٤٣٦ + ٠.٧١٥٥ = ١٣.١٥١٥ متر

٥-٥ الميزانية الدقيقة و المثلثية

الميزانية الدقيقة - و كما يبدو من اسمها - هي ميزانية طولية تهدف للحصول علي قيم دقيقة لفرق الارتفاع بين نقطتين، ومن ثم يتم استخدام أجهزة خاصة (ميزان دقيق precise level) وقامات من نوع خاص في هذه الميزانية. أما حسابات الميزانية الدقيقة فتتم بنفس أسلوب حسابات الميزانية العادية، إلا أن قيمة خطأ القفل (بين الذهاب و الإياب) تخضع لحدود معينة أقل بكثير من الحدود المسموح بها في الميزانية العادية.

الميزانية المثلثية تهدف لحساب (وليس قياس) فرق الارتفاع بين نقطتين من خلال قياس الزاوية الرأسية والمسافة بينهما. ومن ثم فسنخدم أجهزة قياس الزوايا (الثيودليت و المحطة الشاملة) في هذا النوع من الميزانية وليس أجهزة الميزان. وسنتعرض لهذا النوع بالتفصيل في الفصل القادم.

الفصل السادس

المساحة التاكيومترية

٦-١ مقدمة

كلمة "التاكيومتري" معناها القياس السريع ، والمساحة التاكيومترية هي المساحة التي لا تعتمد علي القياس المباشر للكميات المطلوبة ، أو بمعني آخر فهي حساب - وليس قياس - المسافات و فروق الارتفاع ، أي بصورة غير مباشرة. تتميز المساحة التاكيومترية بسهولة وسرعة تنفيذ العمل الحقلي مقارنة بالطرق المساحية الأخرى (مثل قياس المسافات بالشريط أو قياس فروق المناسيب بالميزانية) ، إلا أن دقة المساحة التاكيومترية ليست عالية جدا ولذلك فهي لا تستخدم في الأعمال المساحية والهندسية التي تتطلب دقة عالية.

تعتمد المساحة التاكيومترية علي حساب المسافات الأفقية و الرأسية بين النقاط من خلال قياس الزاوية الرأسية عند موقع الجهاز و المسافة المقطوعة علي الهدف (غالبا قامة) وذلك من خلال ثلاثة شعرات أفقية مركبين داخل حامل شعرات جهاز الثيودليت. الأساس الرياضي للمساحة التاكيومترية هو تكوين مثلثات في المستوي الرأسي يمكن منها حساب المسافة الأفقية وفرق الارتفاع بين نقطتين. تجدر الإشارة إلي أن قياس (أو رصد) الزوايا الرأسية لمسافات طويلة يجعل خط النظر يتأثر بالانكسار الجوي الناتج عن التأثيرات المناخية وبالتالي فأن استخدام هذه الزوايا الرأسية في حسابات المثلث الرأسي لن يكون بدقة عالية ، وهذا أهم عيوب المساحة التاكيومترية. وحيث أن كل أجهزة الثيودليت البصري الحديثة مجهزة بهذه الشعرات فأن أي جهاز ثيودليت يصلح لاستخدامه في الرفع المساحي التاكيومتري.

تستخدم المساحة التاكيومترية في عدد من المشروعات الهندسية مثل:

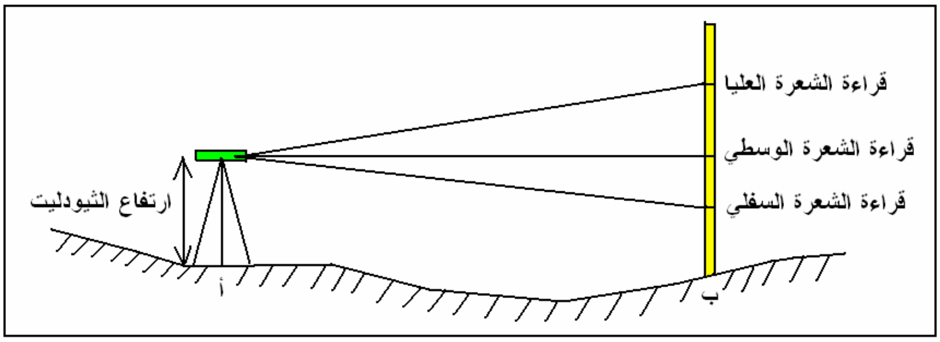
- عمل خرائط كنتورية في الأراضي شديدة الوعورة حيث سيكون استخدام الميزانية صعب جدا و مكلف جدا.
- الرفع المساحي للمناطق المتسعة والتي لا تتطلب دقة عالية.
- التوقيع المبدئي للأعمال الهندسية (مثل الطرق والسكك الحديدية) في الطبيعة.
- حساب أطوال المضلعات (الترافرسات) كبديل عن استخدام الشريط في قياسها.
- تعيين معدلات انحدار المشروعات الطولية (مثل الطرق والمجاري المائية) الممتدة لمسافات طويلة.

٦-٢ طريقة شعرات الاستاديا

هي أسهل و أسرع الطرق التاكيومترية للحصول علي المسافة الأفقية وفرق المنسوب بين نقطتين. يوضع جهاز الثيودليت عند أحد طرفي الخط بينما توضع قامة عند النقطة الأخرى ويقوم جهاز الثيودليت بقراءة و تسجيل الشعرات الثلاثة علي القامة. ولحساب المسافة الأفقية وفرق المنسوب بين طرفي الخط توجد حالتين:

حالة النظرة الأفقية:

فيها يكون المحور الأفقي للثيودليت في وضعه الأفقي تماما ، أي لا توجد زاوية ارتفاع أو انخفاض.



شكل (٦-١) شعرات الاستاديا في الوضع الأفقي

المسافة الأفقية = الفرق بين قراءتي شعرتي الاستاديا (العليا و السفلي) × الثابت التاكيومتري + الثابت الإضافي للجهاز (٦-١)

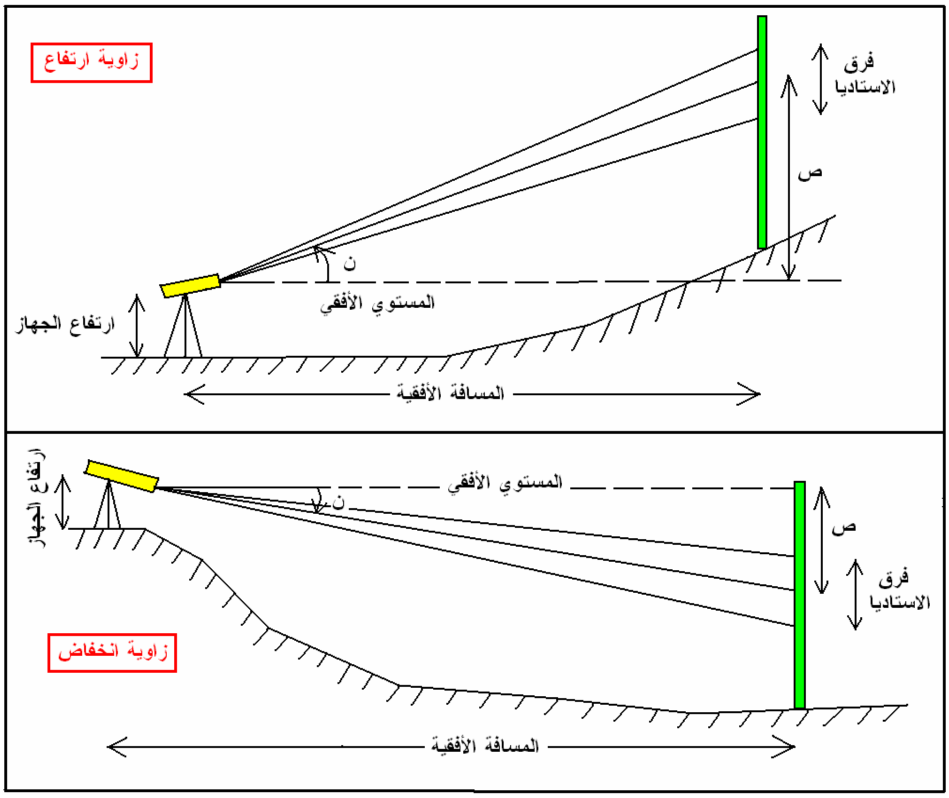
منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الثيودليت + ارتفاع الثيودليت – قراءة الشعرة الوسطي (٦-٢)

حيث:
الثابت التاكيومتري والثابت الإضافي للثيودليت هما قيمتين محددتان في كتالوج الجهاز ذاتها وان كانت أغلب أجهزة الثيودليت لها ثابت تاكيومتري = ١٠٠ و ثابت إضافي = صفر (لكن يجب التأكد من هذه القيم لكل ثيودليت قبل استخدامه).

إذا تم استخدام جهاز ميزان (مجهز بشعرات الاستاديا) في هذا القياس التاكيومتري فهذا ما يطلق عليه أسم "الميزانية المثلثية".

حالة النظرة المائلة:

فيها لا يكون المحور الأفقي للثيودليت في وضعه الأفقي ، أي توجد زاوية ارتفاع أو انخفاض.



شكل (٦-٢) شعرات الاستاديا في الوضع المائل

المسافة الأفقية = الفرق بين قراءتي شعرتي الاستاديا (العليا و السفلي) × الثابت التاكيومتري × جتا^{2} ن + (الثابت الإضافي للجهاز × جتا ن) (٦-٣)

منسوب نقطة القامة في حالة زاوية الارتفاع = منسوب نقطة الثيودليت + ارتفاع الثيودليت – قراءة الشعرة الوسطي + ص (٦-٤)

منسوب نقطة القامة في حالة زاوية الانخفاض = منسوب نقطة الثيودليت + ارتفاع الثيودليت - قراءة الشعرة الوسطي - ص (٦-٤)

حيث:

ص = ٠.٥ فرق استاديا + جا ٢ ن + الثابت التاكيومتري × جا ن (٦-٥)

حيث:

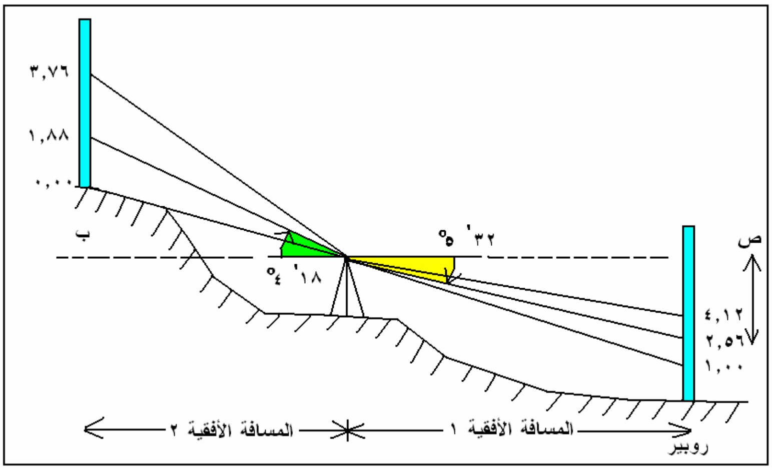
فرق استاديا = قراءة الشعرة العليل – قراءة الشعرة السفلي
ن = الزاوية الرأسية (ارتفاع أو انخفاض).

كما يمكن حساب فرق المنسوب – بعد حساب المسافة الأفقية - كالآتي:

فرق المنسوب بين النقطتين = المسافة الأفقية × ظا الزاوية الرأسية (٦-٦)

<u>مثال:</u>

رصدت قامة موضوعة فوق روبير BM يبلغ منسوبه ٨٠.٠٠ متر فكانت قراءات الشعرات علي التوالي: ١.٠٠ ، ٢.٥٦ ، ٤.١٢ متر وبلغت زاوية الانخفاض ٣٢' °٥ ، ثم نقلت القامة إلي نقطة ب فكانت قراءات الشعرات صفر ، ١.٨٨ ، ٣.٧٦ متر وبلغت زاوية الارتفاع ١٨' °٤. أحسب المسافة الأفقية بين الجهاز و نقطة ب وكذلك منسوب ب إذا علمت أن الثابت التاكيومتري للجهاز يساوي ١٠٠ والثابت الإضافي له يساوي ٣٠ سنتيمتر.



شكل (٦-٣) مثال لطريقة شعرات الاستاديا في الوضع المائل

<u>عند الرصد علي نقطة الروبير:</u>

ص = ٠.٥ فرق استاديا + جا ٢ ن + (الثابت التاكيومتري × جا ن)
= ٠.٥ (٤.١٢ – ١.٠٠) جا ٢× ٣٢' °٥ + (٠.٣٠ × جا ٣٢' °٥)
= ٠.٥ (٣.١٢) جا ٠٤' °١١ + (٠.٣ × جا ٣٢' °٥)
= ٢٩.٩٤ + ٠.٠٢٩ = ٢٩.٩٧ متر

منسوب سطح الجهاز = منسوب الروبير + قراءة الشعرة الوسطي + ص
= ٨٠.٠٠ + ٢.٥٦ + ٢٩.٩٧
= ١١٢.٥٣ متر

المسافة الأفقية = الفرق بين قراءتي شعرتي الاستاديا × الثابت التاكيومتري × جتا^{٢} ن
+ (الثابت الإضافي للجهاز × جتا ن)
= (٣.٧٦ – صفر) × ١٠٠ × جتا^{٢} ٣٢' °٥) + (٠.٣ × جتا ٣٢' °٥)
= ٣٧٣.٨٩ + ٠.٢٩٩ = ٣٧٤.١٩ متر

<u>عند الرصد علي نقطة ب:</u>

فرق المنسوب بين النقطتين = المساحة الأفقية × ظا الزاوية الرأسية
= ٣٧٤.١٩ × ظا ١٨' ٤°
= ٢٨.١٣٥ متر

منسوب ب = منسوب سطح الجهاز + فرق المنسوب – قراءة الشعرة الوسطي
= ١١٢.٥٣ + ٢٨.١٣٥ – ١.٨٨
= ١٣٨.٧٨٥ متر

٦-٣ طريقة الظلال

طريقة مساحة تاكيومترية للحصول علي المسافة الأفقية وفرق المنسوب بين نقطتين باستخدام ثيودليت عادي (لا يوجد به شعرات الاستاديا). يوضع جهاز الثيودليت عند أحد طرفي الخط بينما توضع قامة عند النقطة الأخرى ويقوم جهاز الثيودليت بقراءة و تسجيل الشعرة الوسطي علي القامة مرتين مختلفتين (أي زاويتين رأسيتين مختلفتين). تعد طريقة الظلال أقل دقة من طريقة شعرات الاستاديا لكنها تناسب حالة عدم معرفتنا قيم الثابت التاكيومتري و الإضافي للجهاز المستخدم. ولحساب المسافة الأفقية وفرق المنسوب بين طرفي الخط توجد حالتين:

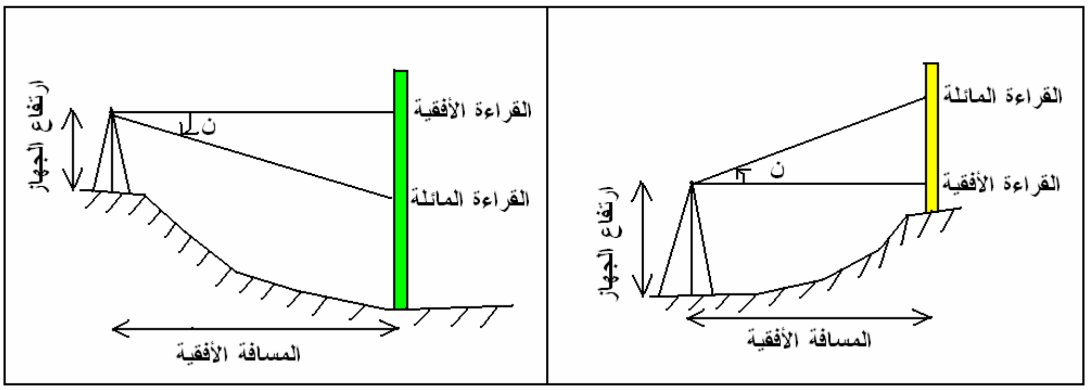
<u>حالة إمكانية أخذ نظرة أفقية:</u>

إذا سمحت طبيعة الأرض أن نأخذ قراءة الشعرة الوسطي في وضع الثيودليت أفقيا تماما بينما النظرة الثانية عندما يكون الثيودليت مائلا (سواء لأعلي أو لأسفل):

المسافة الأفقية = (القراءة الأفقية – القراءة المائلة) / ظا ن (٦-٧)

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز - القراءة المائلة (٦-٨)

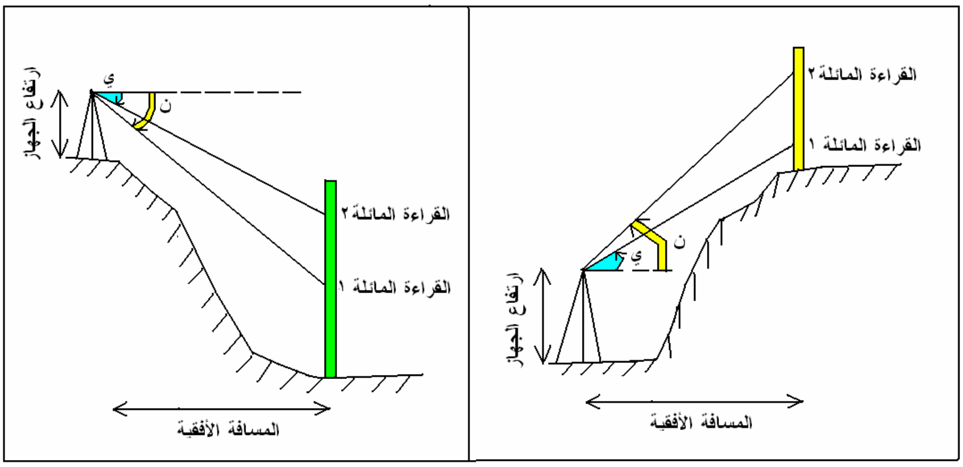
حيث:
ن = الزاوية الرأسية في الحالة المائلة.



شكل (٦-٤) طريقة الظلال في حالة أحد الوضعين يكون أفقيا

<u>حالة عدم إمكانية أخذ نظرة أفقية:</u>

إذا لم تسمح طبيعة الأرض بأخذ قراءة الشعرة الوسطي في وضع الثيودليت أفقيا تماما ، أي أن كلا النظرتين سيتمان و الثيودليت مائلا (أي زاويتين رأسيتين):



شكل (٦-٥) طريقة الظلال في حالة كلا الوضعين مائلين

المسافة الأفقية = (القراءة المائلة ٢ – القراءة المائلة ١) / (ظا ن – ظا ي) (٦-٩)

<u>في حالة زاويتين ارتفاع:</u>

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز +
(المسافة الأفقية × ظا ن) - القراءة المائلة الأولي (٦-١٠)

وللتحقيق فأن:

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز +
(المسافة الأفقية × ظا ي) - القراءة المائلة الثانية (٦-١١)

<u>في حالة زاويتين انخفاض:</u>

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز -
(المسافة الأفقية × ظا ن) - القراءة المائلة الأولي (٦-١٢)

وللتحقيق فأن:

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز -
(المسافة الأفقية × ظا ي) - القراءة المائلة الثانية (٦-١٣)

حيث:
ن = الزاوية الرأسية الأولي (الأكبر)
ي = الزاوية الرأسية الثانية (الأصغر).

<u>مثال:</u>

وضعت قامة علي نقطة ب وتم رصدها بثيودليت موجود عند ج فكانت زاويتي الارتفاع هما ١٤' ٢° و ظا ٣٦' ٥° عندما كانت قراءتي القامة ٠.٢٠ ، ١.٢٠ علي الترتيب. ما هي المسافة الأفقية ب ج و ما منسوب نقطة ب إذا كان منسوب ج يساوي ١٣٧.١٤ مترا وكان ارتفاع الجهاز يساوي ١.٥٠ مترا؟

المسافة الأفقية = (القراءة المائلة ٢ – القراءة المائلة ١) / (ظا ن – ظا ي)
= (١.٢٠ – ٠.٢٠) / (ظا ٣٦' ٥° – ظا ١٤' ٢°)
= ١٦.٩٣ متر

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز +
(المسافة الأفقية × ظا ن) - القراءة المائلة الأولي
= ١٣٧.١٤ + ١.٥٠ + (١٦.٩٣ × ظا ١٤' ٢°) – ٠.٣٠
= ١٣٩.١٠ متر.

وللتحقيق فأن:

منسوب نقطة القامة = منسوب نقطة الجهاز + ارتفاع الجهاز +
(المسافة الأفقية × ظا ي) - القراءة المائلة الثانية
= ١٣٧.١٤ + ١.٥٠ + (١٦.٩٣ × ظا ٣٦' ٥°)– ١.٢٠
= ١٣٩.١٠ متر.

٦-٤ تعيين قيم لا يمكن رصدها

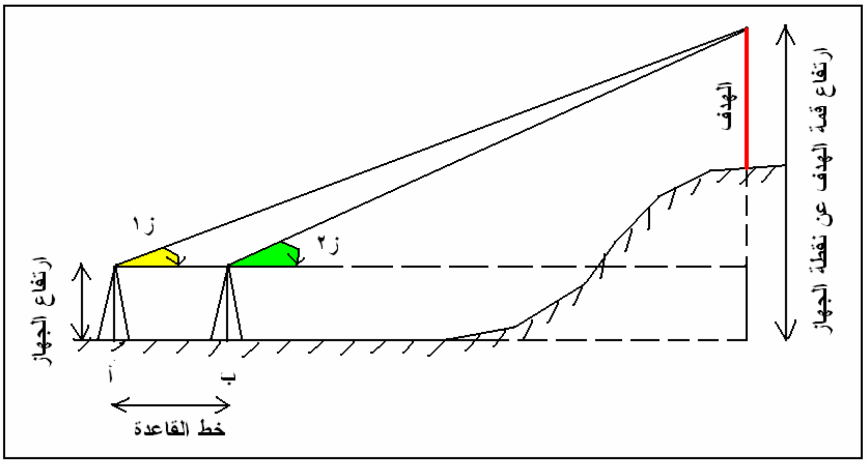
في بعض التطبيقات المساحية بجهاز الثيودليت يواجه الراصد حالات المطلوب فيها تعيين بعض القيم التي لا يمكن رصدها أو قياسها مباشرة في الطبيعة ، وهنا يمكن حسابها من أرصاد أخري.

٦-٤-١ تعيين ارتفاع هدف لا يمكن الوصول إليه

نختار خط قاعدة ونقيس طوله بدقة عالية ونرصد أيضا الزاويتين من كلتا نقطتي هذا الخط إلي قمة الهدف المطلوب:

<u>حالة (١) خط القاعدة أفقي والهدف يقع علي امتداده:</u>

ارتفاع قمة الهدف عن نقطة الجهاز = [طول خط القاعدة / (ظتا ز ١ – ظتا ز ٢)]
+ ارتفاع الجهاز (٦-١٤)

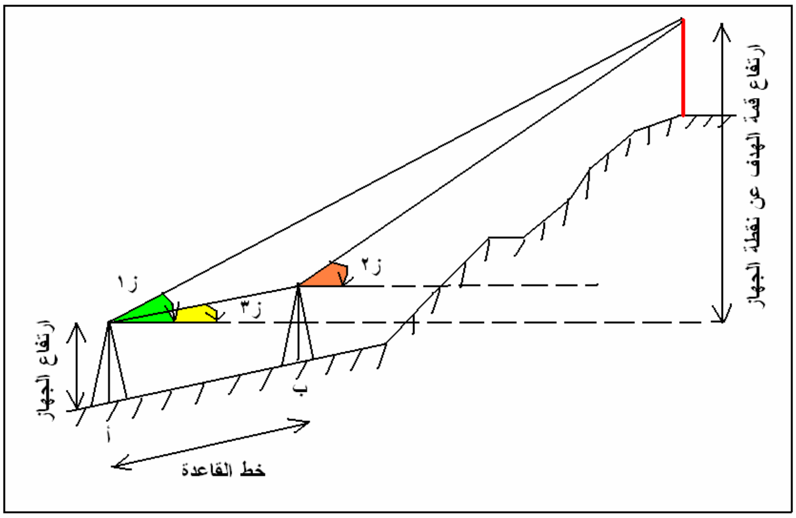


شكل (٦-٦) حساب ارتفاع هدف لا يمكن رصده (أرض أفقية)

ويمكن استخدام نفس المعادلة مع رصد نقطة قاع الهدف (وليس قمته) لنحسب ارتفاع قاع الهدف عن نقطة الجهاز ، ثم نستطيع حساب ارتفاع الهدف ذاته بطرح ناتج كلتا المحاولتين.

<u>حالة (٢) خط القاعدة مائل والهدف يقع علي امتداده:</u>

نختار خط قاعدة ونقيس طوله المائل بدقة عالية ونرصد:
عند نقطة أ: زاوية الهدف = ز١ ، زاوية النقطة الثانية لخط القاعدة = ز٣
عند نقطة ب: زاوية الهدف = ز٢

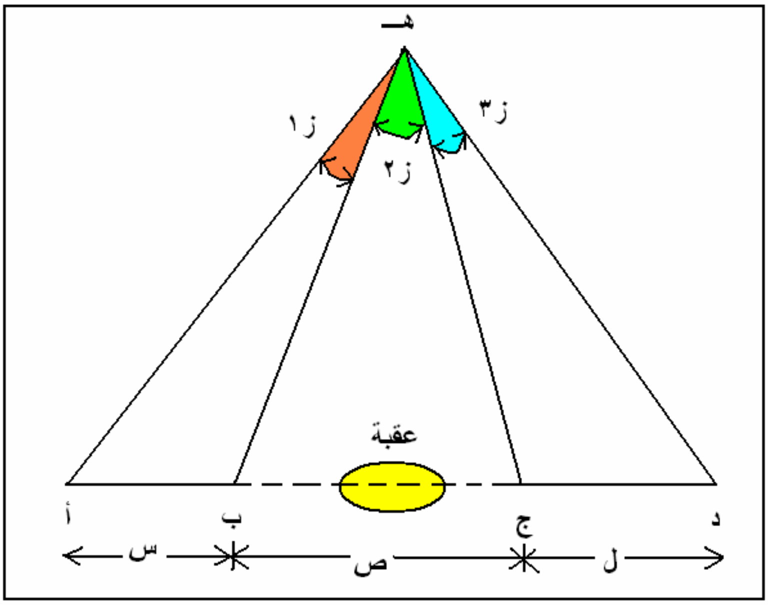


شكل (٦-٧) حساب ارتفاع هدف لا يمكن رصده (أرض مائلة)

ارتفاع قمة الهدف عن نقطة الجهاز =
طول خط القاعدة × جا (ز٢ – ز٣) × قتا (ز٢-ز١)) × جا (ز١)
+ ارتفاع الجهاز (٦-١٥)

٦-٤-٢ تعيين مسافة لا يمكن الوصول إليها

في حالة وجود خط يمكن قياس بعض أجزاؤه مباشرة لكن يوجد جزء منه لا يمكن قياسه (لوجود عائق به) ، نضع الثيوديليت عن نقطة ويتم قياس الزوايا الأفقية الثلاثة ثم يتم حساب طول الجزء الناقص كالتالي:



شكل (٦-٨) حساب جزء من خط لا يمكن قياسه مباشرة

$$\text{ص} = -\frac{\text{س}+\text{ل}}{٢} + \sqrt{\left(\frac{\text{س}+\text{ل}}{٢}\right)^{٢} + \text{س ل}\left(١ - \frac{\text{جا}\,(\text{ز}١+\text{ز}٢)\ \text{جا}\,(\text{ز}٣+\text{ز}٢)}{\text{جا ز}١\ \text{جا ز}٣}\right)} \qquad (٦\text{-}١٦)$$

وأيضا:

$$\text{ص} = -\frac{\text{س}+\text{ل}}{٢} + \sqrt{\left(\frac{\text{س}+\text{ل}}{٢}\right)^{٢} + \text{س ل}\left(١ - \frac{\text{جا}\,(\text{ز}١+\text{ز}٢)\ \text{جا}\,(\text{ز}٣+\text{ز}٢)}{\text{جا ز}١\ \text{جا ز}٣}\right)} \qquad (٦\text{-}١٧)$$

<u>مثال:</u>

عند قياس خط قاعدة أ ب أعترض القياس عقبة. وللتغلب عليها اختيرت نقطتان ب ، ج علي الخط أ د ثم أخذت أرصاد إليهما من نقطة هـ كما يلي:

- الزاوية أ هـ ب = ٢٠" ١٨' ٢٠°
- الزاوية ب هـ ج = ٤٠" ١٩' ٤٥°
- الزاوية ج هـ د = ٢٠" ٢٤' ٣٣°
- طول أب = ٥٢٧.٤٣ متر ، طول ج د = ٦٨٥.٢٩ متر

أحسب طول الخط أ د.

ز ١ = ٢٠" ١٨' ٢٠°

ز٢ = ٤٠" ١٩' ٤٥°
ز٢ = ٢٠" ٢٤' ٣٣°
س = ٥٢٧.٤٣ متر
ص = ٦٨٥.٢٩ متر

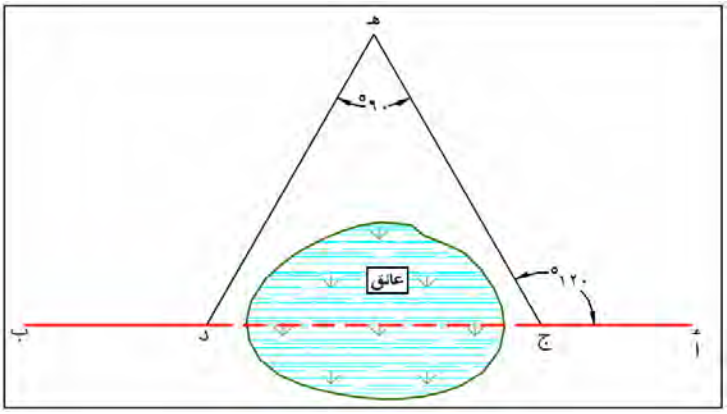
<u>إذن:</u>
ز١ + ز٢ = ٠٠" ٣٨' ٦٥°
ز٣ + ز٢ = ٠٠" ٤٤' ٧٨°
(س+ل)/٢ = ٦٠٦.٣٦ متر
(س-ل)/٢ = ٧٨.٩٣ متر

ص = - ٦٠٦.٣٦ + جذر [(٧٨.٩٣)^{2} + (٥٢٧.٤٣ × ٦٨٥.٢٩ × جا ٠٠" ٣٨' ٦٥°
× جا ٠٠" ٤٤' ٧٨°) / (جا ٢٠" ١٨' ٢٠° جا ٢٠" ٢٤' ٣٣°)]
= - ٦٠٦.٣٦ + جذر (٦٢٣٠ + ١٧٩٠٠٥٧)
= -٦٠٦.٣٦ + ١٣٠٢.٤١٥ متر
= ٦٩٦.٠٥٥ متر

طول أ د = ٥٢٧.٤٣ + ٦٨٥.٢٩ + ٦٩٦.٠٥٥ = ١٩٠٨.٧٧٥ متر

<u>حل عملي بالثيودليت و الشريط:</u>

يمكن الحصول علي طول جزء الخط الذي يعترض القياس عمليا في الطبيعة (دون الحاجة للحسابات) باستخدام الثيودليت و الشريط بالاعتماد علي فكرة إنشاء مثلث متساوي الأضلاع بواسطة الخطوات العملية التالية:



شكل (٦-٩) قياس غير مباشر لجزء من خط لا يمكن قياسه مباشرة

- نقف بالثيودليت عند النقطة أ ونوجه إلي النقطة ب ثم نحدد النقطة ج علي الخط أ ب
- ننقل الثيودليت إلي النقطة ج ونوجه إلي النقطة أ ونجعل قراءة الدائرة الأفقية = صفر بالضبط
- ندير المنظار حتى تكون قراءة الدائرة الأفقية تساوي ١٢٠ درجة ، وعلي هذا الامتداد نحدد موقع مناسب للنقطة هـ (علي أن تتجاوز هذه النقطة العقبة التي تمنع القياس).

- نقيس بالشريط طول الخط ج هـ
- ننقل الثيودليت إلي النقطة هـ ونوجه إلي النقطة ج ونجعل قراءة الدائرة الأفقية تساوي صفر بالضبط ، ثم ندير المنظار حتى تكون الزاوية الأفقية تساوي ٦٠ درجة بالضبط وعلي هذا الاتجاه نقيس مسافة = طول الجزء ج هـ حتى نحدد موقع النقطة د ، ثم نقيس المسافة من د إلي ب.

الآن لدينا مثلث ج هـ د وهو مثلث متساوي الأضلاع ، أي أن طول الجزء ج د (المطلوب تحديده) = طول ج هـ = طول هـ د.

إذن الطول الكلي للخط أ ب = طول أ ج + طول ج د + طول د ب

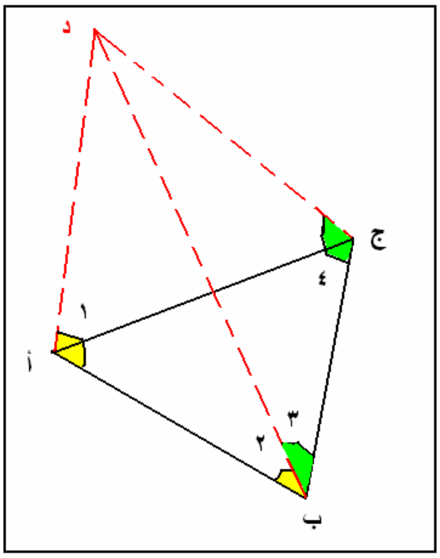
٦-٥ التقاطع الأمامي و العكسي

عملية التقاطع – كتطبيق مساحي – يتم استخدامها للحصول علي إحداثيات نقطة جديدة بدقة عن طريق رصدها من ثلاثة نقاط معلومة الإحداثيات. في حالة التقاطع الأمامي Intersection تكون النقطة الجديدة في موقع يصعب احتلاله بالجهاز (مثل مئذنة مسجد مثلا)، بينما إن كانت طبيعة منطقة العمل تسمح باحتلال هذه النقطة الجديدة بجهاز الثيودليت فهذه الحالة تسمي التقاطع العكسي Resection. تستخدم عملية التقاطع في تكثيف شبكات الثوابت الأرضية المساحية كما أنها تستخدم في المساحة البحرية.

٦-٥-١ التقاطع الأمامي

توجد عدة طرق تعتمد علي نوعية القياسات الحقلية ، إلا أن طريقة متوسط الإحداثيات تعد هي الأسهل. تستخدم هذه الطريقة في حالة أن النقطة الجديدة تري نقاط الثوابت المعلومة وأيضا النقاط المعلومة تري بعضها البعض ، وتكون الزوايا هي الأرصاد المساحية المطلوبة لحساب إحداثيات النقطة الجديدة.

- لتحديد إحداثيات نقطة د التي لا يمكن احتلالها فيتم رصد الزوايا إليها من ٣ نقاط معلومة هي أ ، ب ، ج (الزوايا ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤).
- يتم حساب انحراف أي خط من الخطوط بين النقاط المعلومة (أ ب) من خلال الإحداثيات المعلومة لطرفيه.
- يتم حساب انحراف خطين من نقطتين معلومتين إلي النقطة الجديدة (انحراف أ د و انحراف ب د) باستخدام الزاويتين المقاستين ١ ، ٢.
- باستخدام قانون جيب الزاوية للمثلث أ ب د يتم حساب طول الضلعين أ د ، ب د (المعلوم له الزاويتين ١ ، ٢ والضلع أ ب).
- نحسب إحداثيات نقطة د بمعلومية طول و انحراف الضلع أ د والإحداثيات المعلومة للنقطة أ.
- للتحقيق نحسب – مرة أخري - إحداثيات نقطة د بمعلومية طول و انحراف الضلع بد والإحداثيات المعلومة للنقطة ب.



شكل (٦-١٠) التقاطع الأمامي بطريقة متوسط الإحداثيات

الاحداثي السيني (الشرقي) للنقطة المطلوبة:

س د = س أ + أ د × جا (انحراف أ د)		(٦-١٨)

للتحقيق:

س د = س ب + ب د × جا (انحراف ب د)

الاحداثي الصادي (الشمالي) للنقطة المطلوبة:

ص د = ص أ + أ د × جتا (انحراف أ د)		(٦-١٩)

للتحقيق:

ص د = ص ب + ب د × جتا (انحراف ب د)

إما إن كان الزوايا المقاسة هي تلك الزوايا المحصورة بين خطوط الربط والنقطة الجديدة فأن إحداثيات هذه النقطة يمكن حسابها <u>(بطريقة الزوايا)</u> كالتالي:

س د = [س أ × ظتا ٢ + س ب × ظتا ١ + (ص أ – ص ب)] ÷ (ظتا ١ + ظتا ٢)		(٦-٢٠)

ص د = [ص أ × ظتا ٢ + ص ب × ظتا ١ + (س أ – س ب)] ÷ (ظتا ١ + ظتا ٢)		(٦-٢١)

<u>مثال:</u>

كانت قياسات عملية التقاطع الأمامي كالآتي:

زاوية ٤ = ٤٣" ٢١' ١٢٢°
زاوية ١ = ٣٦" ٢٠' ١٠٥°
زاوية ٣ = ٥٠" ٣٤' ٢٩°
زاوية ٢ = ١٦" ٠١' ٣٩°

وكانت إحداثيات نقاط الربط كالتالي:

النقطة	س	ص
ب	١٣٩٥.٤٥٤	١٠٧٨.٨٠٦
أ	١٢٦٨.٨٥٥	١٠٢٨.٤١٩
ج	١٣٠٩.٦٥٢	١١٧٠.٥٠٣

أحسب إحداثيات النقطة د بطريقة الزوايا؟

من المثلث ج ب د:

س د = [١٣٠٩.٦٥٢ × ظتا ١٦" ٠١' ٣٩° + ١٣٩٥.٤٥٤ × ظتا ٥٠" ٣٤' ٢٩°
+ (١٠٧٨.٨٠٦ – ١١٧٠.٥٠٣)] ÷
(ظتا ٤٣" ٢١' ١٢٢° + ظتا ٥٠" ٣٤' ٢٩°)
= ١١٨٠.١٥١ متر

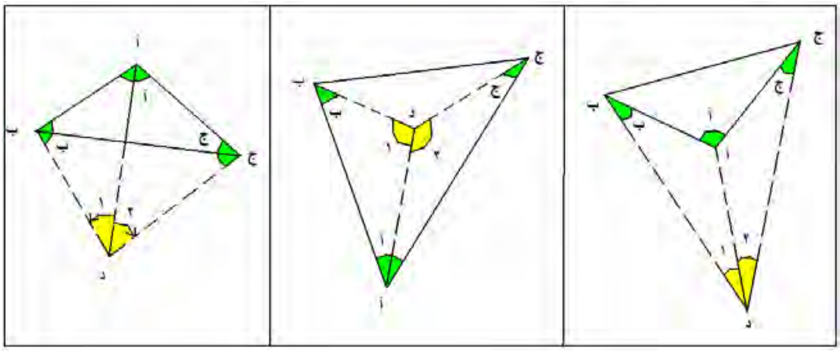
ص د = [١١٧٠.٥٠٣ × ظتا ٥٠" ٣٤' ٢٩° + ١٠٧٨.٨٠٦ × ظتا ٤٣" ٢١' ١٢٢° +
+ (١٣٠٩.٦٥٢ – ١٣٩٥.٤٥٤)] ÷
(ظتا ٤٣" ٢١' ١٢٢° + ظتا ٥٠" ٣٤' ٢٩°)
= ١١٤٥.٩٥١ متر

<u>٦-٥-٢ التقاطع العكسي</u>

في عملية التقاطع العكسي يتم حساب إحداثيات نقطة جديدة من خلال احتلالها بجهاز الثيودليت وإجراء قياسات إلي ٣ نقاط ثوابت أرضية معلومة الإحداثيات. يحتاج الراصد لهذه الطريقة عندما لا يمكن احتلال نقاط الثوابت الأرضية المعلومة ذاتها.

توجد عدة طرق لحل التقاطع العكسي لكن الطريقة التالية هي <u>طريقة هيئة المساحة الأمريكية</u>:

يتم احتلال النقطة الجديدة د وقياس الزاويتين ١ ، ٢ (في اتجاه دوران عقرب الساعة) إلي نقاط الربط المعلومة أ ، ب ، ج.



شكل (٦-١١) التقاطع العكسي

خطوات الحل:

(١) نحسب الزاوية ر:

ر = ب + ج = ٣٦٠ – (أ + ١ + ٢) (٦-٢٢)

(٢) نحسب الزاوية ج:

ظتا ج = ظتا ر + (أ ج جا ١ / أ ب جا ر) (٦-٢٣)

(٣) نحسب الزاوية ب:

ب = ر – ج (٦-٢٤)

(٤) نحسب المسافة أ د:

أ د = أ ج جا ج / جا ٢ (٦-٢٥)

أو:

أ د = أ ب جا ب / جا ١ (٦-٢٦)

(٥) نحسب الزاوية ج أ د = ١٨٠ – (١ + ٢) (٦-٢٧)

(٦) ومنها نحسب انحراف الخط أ د

(٧) باستخدام قاعدة الجيب نحسب المسافة ج د أو ب د (أو كلاهما).

(٨) نحسب إحداثيات النقطة د باستخدام انحراف وطول ضلع الخط أ د

(٩) للتحقيق:
نحسب إحداثيات النقطة د باستخدام انحراف وطول ضلع الخط ب د أو الخط ج د.

<u>مثال:</u>

إحداثيات النقاط المعلومة كالتالي:

النقطة	س	ص
ب	١٠٠٠٠.٠٠	٢٠٠٠٠.٠٠
أ	١٦٦٧٢.٥٠	٢٠٠٠٠.٠٠
ج	٢٧٧٣٢.٧٦	١٤٢١٥.٢٤

زاوية ١ = ٥٣" ٠٥' ٢٠°
زاوية ٢ = ٠٨" ٠٦' ٣٥°
الضلع أ ب = ٦٦٧٢.٥
الضلع أ ج = ١٢٤٨١.٧

من إحداثيات نقاط الربط (أ ، ب ، ج) يمكن حساب انحراف خطي المثلث أ ب ، أ ج ثم حساب الزوايا الداخلية أ:

زاوية أ = ٢٢" ٢٣' ١٥٢°

(١) نحسب الزاوية ر:
ر = ب + ج = ٣٦٠ – (أ + ١ + ٢)
= ٣٦٠ – (٢٢" ٢٣' ١٥٢° + ٥٣" ٠٥' ٢٠° + ٠٨" ٠٦' ٣٥°)
= ٣٧" ٢٤' ١٥٢°

(٢) نحسب الزاوية ج:
ظتا ج = ظتا ر + (أ ج جا ١ / أ ب جا ر)
= ظتا ٣٧" ٢٤' ١٥٢° +
(١٢٤٨١.٧ جا ٥٣" ٠٥' ٢٠° / ٦٦٧٢.٥ جا ٣٧" ٢٤' ١٥٢°
= ٠.٤٩٩٩٥٦٣٨

إذن الزاوية ج = ١٣" ٢٦' ٦٣°

(٣) نحسب الزاوية ب:
ب = ر – ج
= ٣٧" ٢٤' ١٥٢° - ١٣" ٢٦' ٦٣° = ٢٤" ٥٨' ٨٨°

(٤) نحسب المسافة أ د:
أ د = أ ج جا ج / جا ٢
= ١٢٤٨١.٧ جا ١٣" ٢٦' ٦٣° / جا ٠٨" ٠٦' ٣٥° = ١٩٤١٤.٦٩٣

للتحقيق:

أ د = أ ب جا ب / جا ١
= ٦٦٧٢.٥ جا ٢٤" ٥٨' ٨٨° / جا ٥٣" ٠٥' ٢٠° = ١٩٤١٤.٦٩٣

(٥) نحسب الزاوية ج أ د = ١٨٠ – (١ + ٢)
= ١٨٠ – (٥٣" ٠٥' ٢٠° +٠٨" ٠٦' ٣٥°)
= ٣٩" ٢٧' ٨١°

(٦) نحسب طول الخط أ د:
أ د = أ ج جا ج أ د / جا ٢
= ١٢٤٨١.٧ جا ٣٩" ٢٧' ٨١° / جا ٠٨" ٠٦' ٣٥°
= ٢١٤٦٥.٢٨٩

(٧) نحسب انحرافات الخطوط:

الخط	الزاوية	الانحراف	ملاحظات
أ ج		٣٨" ٣٦' ١١٧°	الانحراف الأمامي أ ج
	٣٩" ٢٧' ٨١°		الزاوية ج أ د
أ د		١٧" ٠٤' ١٩٩°	الانحراف الأمامي أ د
د أ		١٧" ٠٤' ١٩°	الانحراف الخلفي د أ
	٠٨" ٠٦' ٣٥°		الزاوية ٢
د ج		٢٥" ١٠' ٥٤°	الانحراف الأمامي د ج
		٢٥" ١٠' ٢٣٤°	الانحراف الخلفي ج د
	١٣" ٢٦' ٦٣°		الزاوية ج
ج أ		٣٨" ٣٦' ٢٩٧°	تحقيق = الانحراف الخلفي للخط أ ج

(٨) نحسب إحداثيات النقطة د باستخدام انحراف وطول ضلع الخط أ د وإحداثيات النقطة المعلومة أ:

$س_{د}$ = ١٠٣٢٨.٨ ، $ص_{د}$ = ١٦٥٠.٩

الفصل السابع

المنحنيات

٧-١ مقدمة

تحتاج المشروعات الهندسية الطولية (مثل الطرق و السكك الحديدية و أنابيب المياه) لوجود المنحنيات لكي تتفادى بعض العقبات الطبيعية التي تعيق تنفيذ الخط المستقيم أفقيا أو لعبور العائق رأسيا (الكباري و الجسور). أحيانا تكون التكلفة الاقتصادية هي الداعي لتنفيذ المنحنيات بدلا من إزالة الحاجز الطبيعي الموجود والذي سيكون إزالته ذو تكلفته عالية.

شكل (٧-١) المنحنيات في الطرق

تنقسم المنحنيات إلي منحنيات أفقية و منحنيات رأسية و منحنيات مركبة (منحنيات أفقية و رأسية معا).

٧-٢ أنواع المنحنيات الأفقية

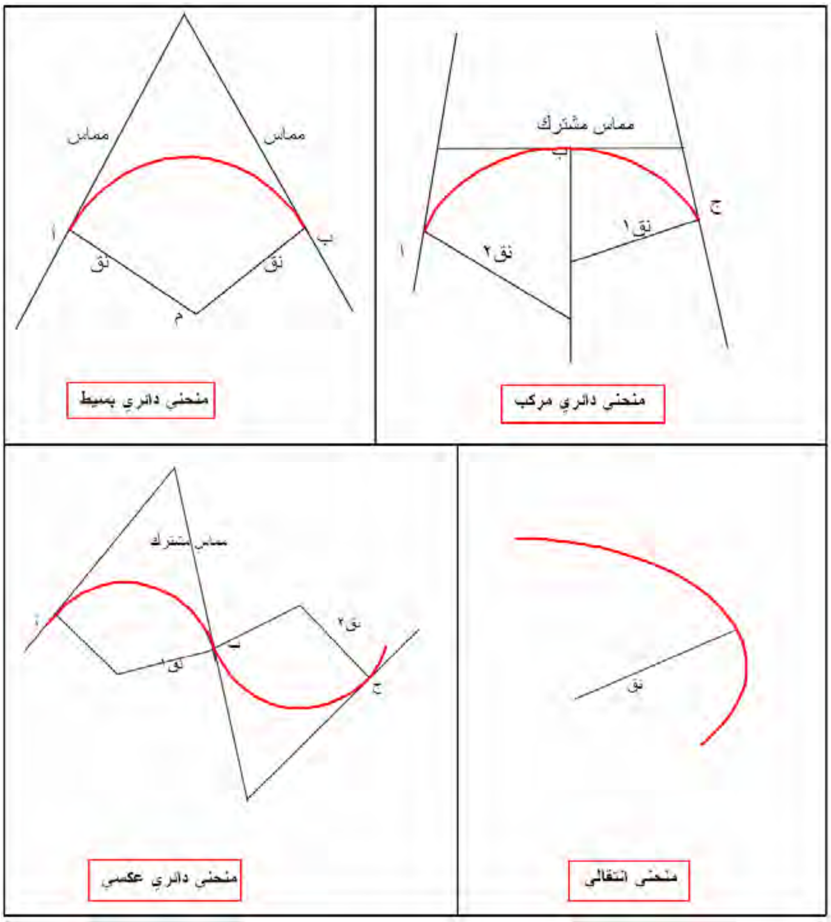
يستخدم المنحني الأفقي للتغيير من اتجاه خط مستقيم لخط مستقيم آخر ويكون المنحني مماسا لكلا منهما. وتنقسم المنحنيات الأفقية إلي أربعة أنواع:

(أ) المنحني الدائري البسيط Simple Curve: يتكون من قوس من دائرة نصف قطرها ثابت ويكون مماسا لها.

(ب) المنحني الدائري المركب Compound Curve: يتكون من قوسين من دائرتين مختلفتان في أنصاف أقطارهما ويقع مركزي الدائرتين في جهة واحدة من المنحني.

(ج) المنحني الدائري العكسي Reverse Curve: يتكون من قوسين من دائرتين يقع مركزيهما في جهتين مختلفتين من المنحني.

(د) المنحني الانتقالي Spiral Curve: يتكون من قوس ذي أنصاف أقطار متعددة تتراوح بين ما لا نهاية إلي نصف قطر معين.



شكل (٧-٢) أنواع المنحنيات

٧-٢-١ تعريف المنحنى

يتم تعريف أي منحني إما بنصف القطر أو درجة المنحني ، والعلاقة الرياضية بينهما كالتالي:

جا د/٢ = ١٠ ÷ نق (٧-١)

يمكن تبسيط المعادلة (٧-١) بدرجة تقريبية لأنصاف الأقطار الكبيرة لتصبح:

نق (متر) = ١١٣٦ ÷ د (٧-٢)

حيث:

نق نصف قطر المنحني

د الزاوية المركزية (بالدرجات) المقابلة لوتر معلوم يسمي وتر القياس وغالبا يساوي ٢٠ متر.

مثال:

أحسب نصف قطر المنحني الذي درجته تساوي ٦^{o} بالطريقة الدقيقة و الطريقة التقريبية؟

الطريقة الدقيقة:

جا د/٢ = ١٠ ÷ نق
جا ٢/٦ = ١٠ ÷ نق
نق = ١٩١.٠٦ متر

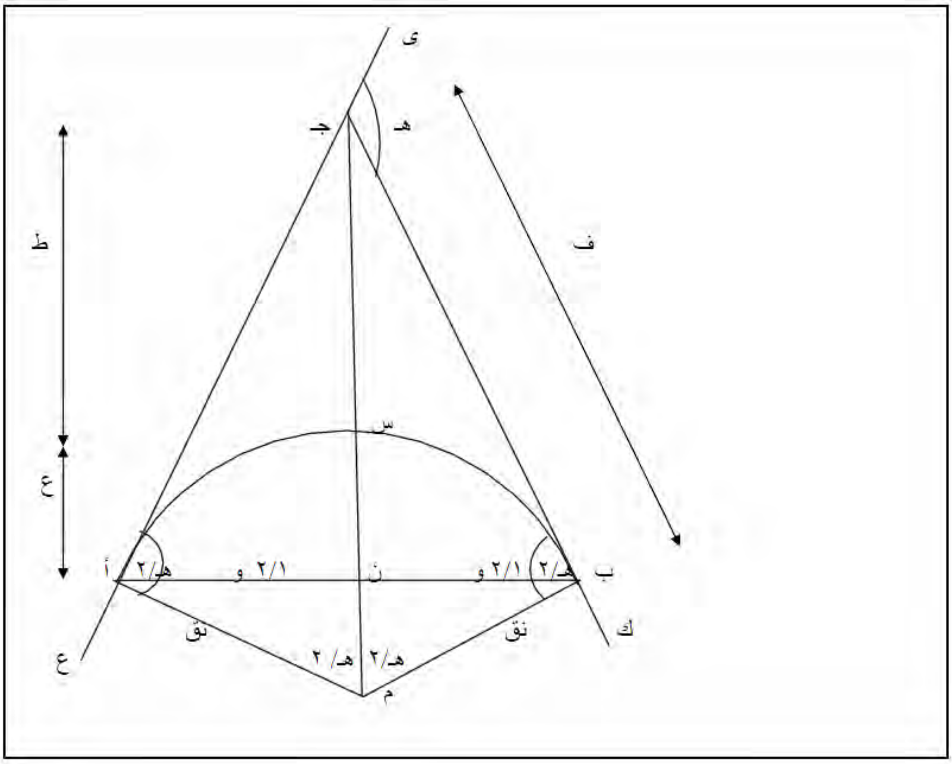
الطريقة التقريبية:

نق = ١١٣٦ ÷ د
= ١١٣٦ ÷ ٦ = ١٩١.٠٠ متر

٧-٢-٢ أجزاء المنحنى البسيط

تتكون أجزاء المنحني البسيط من (أنظر الشكل):

هـ^{o}	زاوية تقاطع المماسين
هـ^{o} = الزاوية ب م أ	الزاوية المركزية للمنحني
نق = أ م = ب م = س م	نصف قطر المنحني
ق = القوس أ س ب	طول المنحني
و = الخط الواصل بين نقطتي المماس	الوتر الكلي
ف = أ ج = ب ج	طول المماس الجزئي
ع = البعد العمودي بين قمة المنحني والوتر الكلي	السهم الداخلي
ط = البعد العمودي بين قمة المنحني ونقطة التقاطع	السهم الخارجي
نقطة التماس الأولي	نقطة بداية المنحني
نقطة التماس الثانية	نقطة نهاية المنحني



شكل (٧-٣) أجزاء المنحني البسيط

٧-٢-٣ حساب أجزاء المنحنى البسيط

لحساب أجزاء المنحني البسيط يلزم معرفة قيم : (١) نصف القطر نق ، (٢) درجة المنحني د ، (٣) زاوية تقاطع المماسين هـ:

طول المماس الجزئي:

ف = نق ظا (هـ/٢) (٧-٣)

طول الوتر الكلي:

و = ٢ نق جا (هـ/٢) (٧-٤)

طول المنحني:

ق = ٠.٠١٧٤٥ هـ نق (٧-٥)

حيث هـ بالدرجات.

طول السهم الداخلي:

ع = نق (١- جتا (هـ/٢)) (٧-٦)

وأيضا:

ع = نق – جذر [نق^{٢}- و^{٢} ÷ ٤)] (٧-٧)

طول السهم الخارجي:

ط = نق [قا (هـ/٢) – ١] (٧-٨)

الفرق بين طول القوس و الوتر المقابل له:

ق – و = ق^{٣} ÷ ٢٤ نق^{٢} = و^{٣} ÷ ٢٤ نق^{٢} (٧-٩)

٧-٢-٤ تعيين زاوية التقاطع ونصف قطر المنحنى فى الطبيعة:

لتعيين زاوية تقاطع المنحني في الطبيعة نمد المماسين ن ق ، ص س علي استقامتهما (باستخدام الشواخص و الشوك) ونضع شاخصين ج١ ، ج٢ علي امتداد ن ق ونشد بينهما شريط. نتحرك علي هذا الشريط حتى نعين نقطة ج علي امتداد ص س فتكون نقطة تقاطع المماسين ، ويؤخذ علي المماسين ج ل = ج ك بحيث يكون ك ل طولا مناسبا ثم يقاس طوله.

نحسب الزاوية س كالتالي:

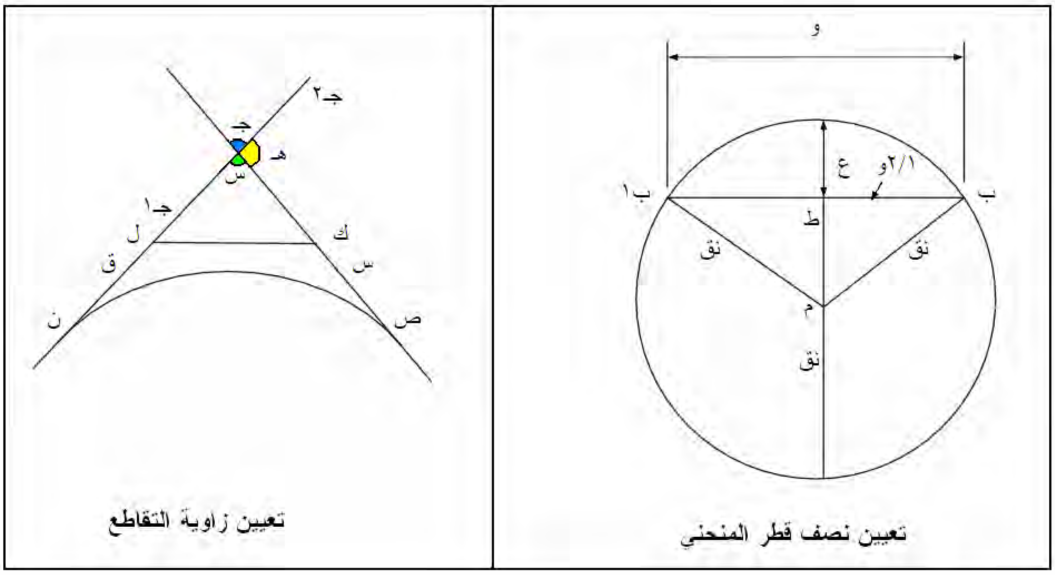
جا (س/٢) = (٠.٥ المسافة ك ل × المسافة ك ج) (٧-١٠)

ومنها نحسب الزاوية هـ:

زاوية التقاطع هـ = ١٨٠^{o} – س (٧-١١)

و لحساب نصف قطر المنحني (نق) – أنظر الشكل التالي - نقيس طول الوتر الكلي و (المسافة من ب إلي ب١) ، وطول السهم الداخلي ع (المسافة من ط إلي قمة المنحني):

نق = و^{٢} + ٨ ع (٧-١٢)



شكل (٧-٤) تعيين أجزاء المنحني البسيط في الطبيعة

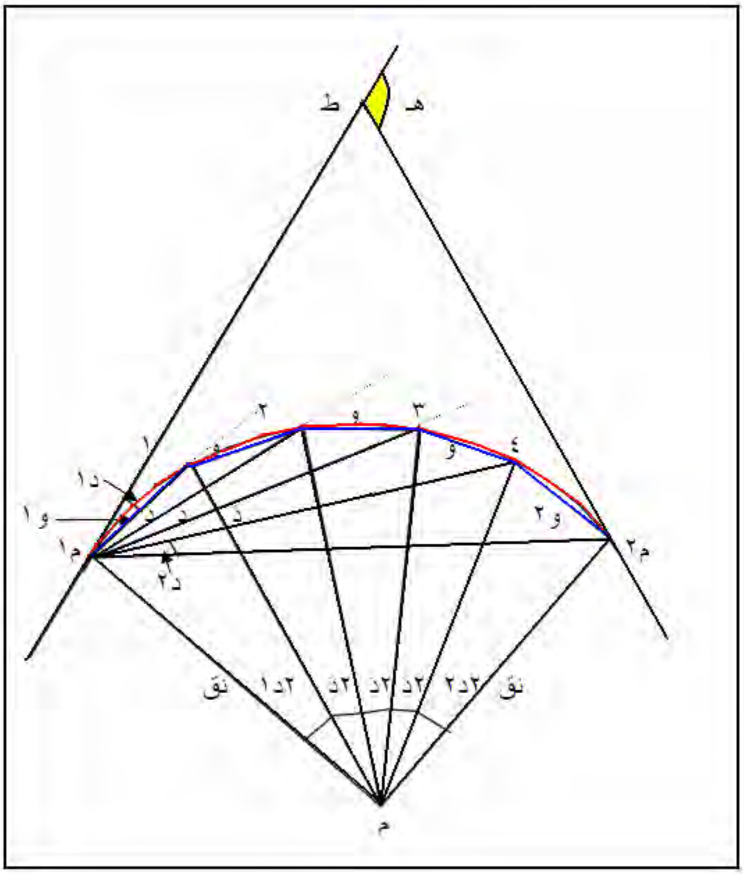
<u>٧-٣ توقيع المنحنيات الأفقية فى الطبيعة</u>

عملية توقيع (تحديد) مواضع عدة نقاط علي المنحني بغرض توقيعه في الطبيعة تسمي بعملية "تخطيط المنحني". يتم توقيع النقاط بحيث تتاسب المسافات بينها علي الدقة المطلوبة بحيث أننا عند توصيل هذه النقاط بخطوط مستقيمة (أوتار المنحني) نحصل علي محور المنحني في الطبيعة. توجد عدة طرق لتوقيع المنحنيات الأفقية في الطبيعة ويعتمد اختيار الطريقة علي الأجهزة المساحية المتوفرة وأيضا علي الدقة المطلوبة.

<u>٧-٣-١ توقيع المنحنيات الأفقية بجهاز الثيودليت</u>

يستخدم الثيودليت و الشريط (أو جهاز قياس المسافات الكترونيا EDM في حالة توافره) لتوقيع نقاط المنحني بطريقة تسمي طريقة زوايا الانحراف. في هذه الطريقة نحدد عدة أوتار جزئية للمنحني (و١ ، و٢ ، و٣ .... الخ) من خلال حساب قيم زوايا الانحراف المقابلة لهذه الأوتار (د١ ، د٢ ، د٣ ..... الخ) من خلال المعادلة:

د بالدرجات = (٩٠° × و) ÷ (ط × نق)　　　　　　　　　　　　(٧-١٣)



شكل (٧-٥) توقيع المنحني الدائري بالثيودليت و الشريط بطريقة زوايا الانحراف

<u>مثال:</u>

منحني دائري بسيط نصف قطره ٣٠٠ مترا يصل بين محوري طريقين مستقيمين متقاطعين بزاوية انحراف قدرها ٣٠° وحطة نقطة التقاطع (ط) هي ٢٢٥٦.٥٩ متر. أحسب كل المعلومات اللازمة لتوقيع هذا المنحني مع عمل التحقيق الحسابي.

(١) طول المماس:

ف = نق ظا (هـ/٢) = ٢٠٠ ظا (٣٠°/٢) = ٥٣.٥٩ متر

(٢) طول المنحني:

ل = ط نق هـ ÷ ١٨٠° = ط × ٢٠٠ × ٣٠° / ١٨٠° = ١٠٤.٧٢ متر

(٣) محطة م١ = محطة نقطة التقاطع ط – طول المماس ف
= ٢٢٥٦.٥٩ – ٥٣.٥٩ = ٢٢٠٣.٠٠ متر

(٤) محطة م٢ = محطة م١ + طول المنحني ل
= ٢٢٠٣.٠٠ + ١٠٤.٧٢ = ٢٣٠٧.٧٢ متر

(٥) نختار طول واحد مناسب للأوتار الجزئية الوسطي (و) بحيث يكون:

و : أقل من أو يساوي (نق / ٢٠) (٧-١٤)

حيث أن نق/٢٠ = ٢٠/٢٠٠ = ١٠ أمتار

إذن نختار و = ١٠ أمتار

(٦) حساب محطات المنحني:

محطة النقطة الأولي علي المنحني (نقطة ١) = أول رقم لمضاعفات العشرة (التي هي قيمة و) بعد محطة م١

حيث أن م١ = ٢٢٠٣.٠٠ متر

إذن نقطة ١ = ٢٢١٠ متر

وبذلك فأن نقطة ٢ = ٢٢٢٠ متر

نقطة ٣ = ٢٢٣٠ متر .... وهكذا.

محطة النقطة الأخيرة علي المنحني = آخر رقم لمضاعفات العشرة (التي هي قيمة و) قبل محطة م٢

حيث أن م٢ = ٢٣٠٧.٧٢ متر

إذن النقطة الأخيرة = ٢٣٠٠ متر

بذلك فأن محطات نقاط المنحني بداية من نقطة م١ إلي نقطة م٢ ستكون:

٢٢٠٣.٠٠ ، ٢٢١٠ ، ٢٢٢٠ ، ٢٢٣٠٩ ، ٢٢٤٠ ، ٢٢٥٠ ، ٢٢٦٠ ، ٢٢٧٠ ، ٢٢٨٠ ، ٢٢٩٠ ، ٢٣٠٠ ، ٢٣٠٧.٧٢ متر

(٧) حساب أطوال الأوتار الجزئية:

طول الوتر الجزئي الأول:
و١ = محطة النقطة الأولي علي المنحني – محطة م١
= ٢٢١٠.٠٠ – ٢٢٠٣.٠٠ = ٧.٠٠ متر

طول الوتر الجزئي الأوسط = و = ١٠ متر

طول الوتر الجزئي الأخير = محطة م٢ – محطة الوصول الأخيرة علي المنحني
= ٢٣٠٧.٧٢ – ٢٣٠٠.٠٠ = ٧.٧٢ متر

عدد الأوتار الجزئية:
ن = (محطة النقطة الأخيرة – محطة النقطة الأولي) ÷ و (٧-١٥)
= (٢٣٠٠ – ٢٢١٠) ÷ ١٠ = ٩ أوتار

عدد النقاط علي المنحني = عدد الأوتار الجزئية + ١
= ٩ +١ = ١٠ نقاط

(٨) حساب زوايا الانحراف الجزئية:
باستخدام المعادلة ٨-١٣:
د بالدرجات = (٩٠° × و) ÷ (ط × نق)

زاوية الانحراف الأولي: د١= (٩٠° × و١) ÷ (ط × نق)
= (٩٠° × ٧) ÷ (ط × ٢٠٠) = ١٠" ٠٠' ١°

زاوية الانحراف الوسطي: د= (٩٠° × و) ÷ (ط × نق)
= (٩٠° × ١٠) ÷ (ط × ٢٠٠) = ٥٧" ٢٥' ١°

زاوية الانحراف الأخيرة: د٢= (٩٠° × و٢) ÷ (ط × نق)
= (٩٠° × ٧.٧٢) ÷ (ط × ٢٠٠) = ٢١" ٠٦' ١°

التحقيق الحسابي:

مجموع د١ + (ن×د) + د٢ = هـ /٢ (٧-١٦)

مجموع د١ + (ن×د) + د٢ = ١٠" ٠٠' ١° + (٩ × ٥٧" ٢٥' ١° + ٢١" ٠٦' ١°)
= ٠٤" ٠٠' ١٥°

هـ / ٢ = ٣٠° / ٢ = ١٥°

الفرق = ٠٤" ٠٠' ١٥° - ٠٠" ٠٠' ١٥° = ٠٤"
وهو فرق بسيط نتيجة التقريب ، وبذلك فأن التحقيق الحسابي سليما.

نكون الجدول التالي لسهولة توقيع نقاط المنحني في الطبيعة حيث سيكون العمود الأخير في الجدول عبارة عن المجموع التراكمي لزوايا الانحراف الجزئية ، وهذا لتسهيل العمل بجهاز الثيودليت بحيث يتم تصفير الدائرة الأفقية (جعلها = صفر بالضبط) عند التوجيه علي النقطة ط ثم نبدأ في أخذ قراءات الدائرة عند هذه القيم لتوقيع نقاط المنحني.

نقطة المنحني	محطة النقطة	طول الوتر الجزئي (متر)	زاوية الانحراف الجزئية	زاوية الانحراف الكلية (قراءة الدائرة الأفقية)
١	٢٢١٠	٧.٠	١° ٠٠' ١٠"	١° ٠٠' ١٠"
٢	٢٢٢٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	٢° ٢٦' ٠٧"
٣	٢٢٣٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	٣° ٤٢' ٠٤"
٤	٢٢٤٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	٥° ١٨' ٠١"
٥	٢٢٥٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	٦° ٤٣' ٥٨"
٦	٢٢٦٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	٨° ٠٩' ٥٥"
٧	٢٢٧٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	٩° ٢٥' ٥٢"
٨	٢٢٨٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	١١° ٠١' ٤٩"
٩	٢٢٩٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	١٢° ٢٧' ٤٦"
١٠	٢٣٠٠	١٠	١° ٢٥' ٥٧"	١٣° ٥٣' ٤٣"
م٢	٢٣٠٧.٧٢	٧.٧٢	١° ٠٦' ٢١"	١٥° ٠٠' ٠٤"

٧-٣-٢ توقيع المنحنيات الأفقية بجهاز المحطة الشاملة

يمكن توقيع المنحني بجهاز المحطة الشاملة بعدة طرق إلا أن أسهل الطرق هي طريقة زوايا الانحراف و الأطوال. يتم حساب قيم زوايا الانحراف كما في طريقة الثيودليت ، ثم يتم حساب أطوال الإضلاع من نقطة المحطة الشاملة حتى آخر نقطة تماس:

هـ ١ بالدقائق = ١٧١٨.٩ × ل ÷ نق (٧-١٧)

طول الضلع رقم ١ = ل جا (١٨٠ – هـ ١) ÷ جا هـ ١ (٧-١٨)

طول الضلع رقم ٢ = ل جا (١٨٠ – ٢ هـ ١) ÷ جا هـ ١ (٧-١٩)

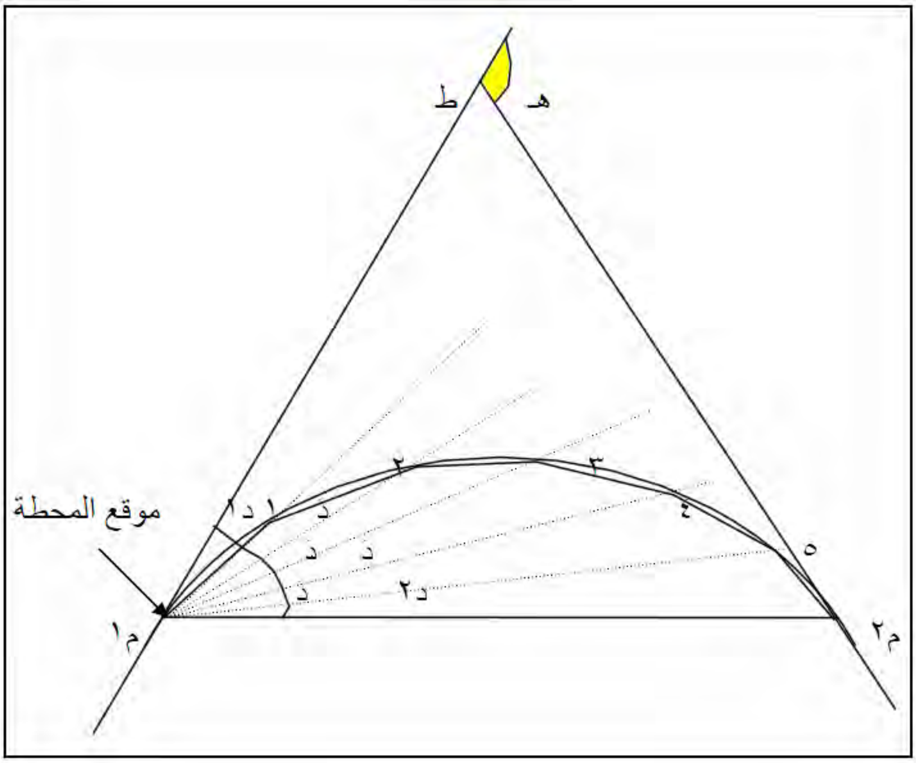
و هكذا.

ثم نكون الجدول اللازم للبيانات المطلوب توقيعها في الطبيعة.

يتكون العمل الحقلي من الخطوات التالية:

- نختار موقع جهاز المحطة الشاملة وغالبا يكون هو نقطة التماس الأولي أ.
- يتم توجيه خط النظر مع خط التماس الواصل من النقطة المحتلة (أ) ونقطة تقاطع المماسين ويتم تصفير الجهاز عندها.
- يتم التوجيه إلي النقطة المطلوب توقيعها بزاوية = هـ ١

– يتحرك المساح بالعاكس علي اتجاه خط النظر ونرصد المسافة بالمحطة الشاملة (من الجهاز إلي العاكس) فنحدد إن كان العاكس سيتحرك للأمام أم للخلف حتى يكون علي البعد المطلوب المسجل في الجدول.
– نكرر الخطوات السابقة لباقي نقاط المنحني المطلوب توقيعها.



شكل (٧-٦) توقيع المنحني الدائري بجهاز المحطة الشاملة

<u>مثال:</u>

عين المقادير اللازمة لتخطيط منحني نصف قطره ٦٠٠ مترا بأوتاد متساوية كلا منها ٢٠ مترا علما بأن زاوية تقاطع المماسين تبلغ ٣٦" ٢٤' و تدرج نقطة تقاطع المماسين تساوي ٧٣.٧٧ طرحة شريط.

ف = نق × ظا (هـ/٢) = ٦٠٠ ظا (٣٦" ٢٤' /٢) = ١٣٠٨ متر
= ١٣٠٨/٢٠ = ٦.٥٤ طرحة شريط.

تدريج نقطة التماس الأولي = ٧٣.٨٨ – ٦.٥٤ = ٦٧.٣٤ طرحة شريط

طول الوتر الجزئي الأول = ٦٨ – ٦٧.٣٤ = ٠.٦٦ طرحة = ١٣.٢ متر

هـ ج = ١٧١٨.٩ × ١٣.٢ ÷ ٦٠٠ = ٣٧.٨١

هـ ١ = ١٧١٨.٩ × ٢٠ ÷ ٦٠٠ = ٥٧.٣٠

طول المنحني ق = ٠.٠١٧٤٥ × هـ × نق
= ٠.٠١٧٤٥ × ٢٤ '٣٦" × ٦٠٠ = ٢٥٧.٥٦ متر

طول الضلع رقم ١ = ٢٠ × جا (١٨٠ – ٣٧.٨١) ÷ جا ٥٧.٣٠ = ١٣.٢ متر

طول الضلع رقم ٢=٢٠ ×جا (١٨٠– ٣٧.٨١ + ٢×٥٧.٣٠)÷جا ٥٧.٣٠=٣٣.٢ متر

طول الضلع رقم ٣=٢٠ ×جا (١٨٠– ٣٧.٨١ + ٣×٥٧.٣٠)÷جا ٥٧.٣٠=٥٣.١٨ متر

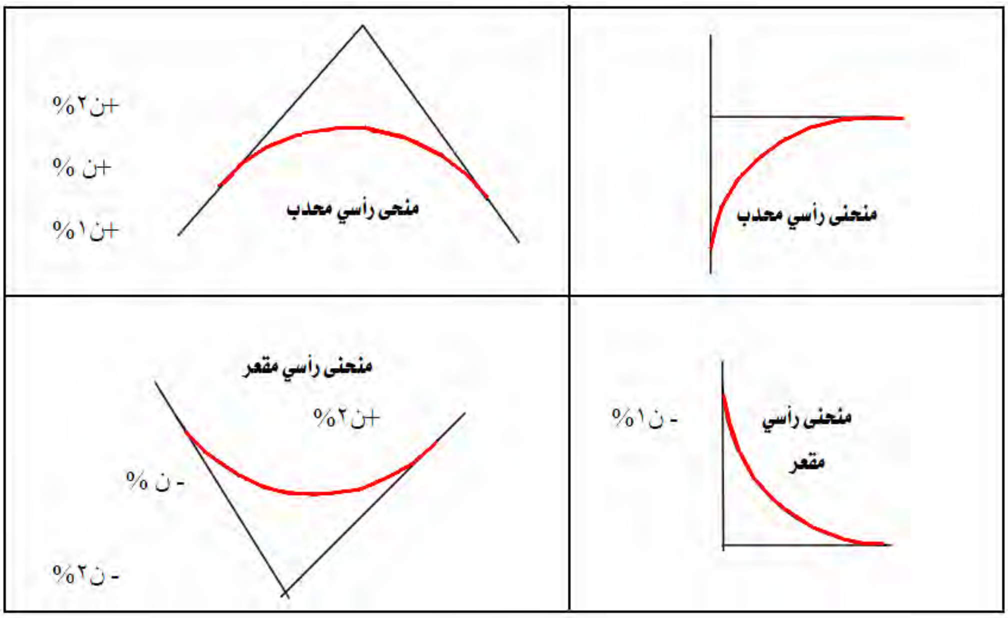
وهكذا حتى الضلع رقم ١٣.

طول الضلع الأخير = ٢٠ جا (١٨٠ – (هـ/٢)) ÷ جا هـ = ٢٥٥.٦٣ متر

النقطة	طول الوتر	زاوية الانحراف	طول الضلع من المحطة الشاملة للنقطة المطلوبة
١	٢٠	٠٠° ٣٧' ٤٨.٦"	١٣.٢
٢	٢٠	٠١° ٣٥' ٦.٦"	٢٣.٢
٣	٢٠	٠٢° ٣٢' ٢٤.٦"	٥٣.١٨
٤	٢٠	٠٣° ٢٩' ٤٢.٦"	٧٣.١٥
٥	٢٠	٠٤° ٢٧' ٠.٦"	٩٣.١٠
٦	٢٠	٠٥° ٢٤' ١٨.٦"	١١٣.٠٣
٧	٢٠	٠٦° ٢١' ٣٦.٦"	١٣٢.٩٣
٨	٢٠	٠٧° ١٨' ٥٤.٦"	١٥٢.٧٩
٩	٢٠	٠٨° ١٦' ١٢.٦"	١٧٢.٦٠
١٠	٢٠	٠٩° ١٣' ٣٠.٦"	١٩٢.٣٧
١١	٢٠	١٠° ١٠' ٤٨.٠"	٢١٢.٠٩
١٢	٢٠	١١° ٠٨' ٦.٦"	٢٣١.٧٤
١٣	٢٠	١٢° ٠٥' ٢٤.٦"	٢٥١.٣٣
١٤	٢٠	١٢° ١٨' ٠٠" = هـ / ٢	٢٥٥.٦٣

٧-٤ المنحنيات الرأسية

تنقسم المنحنيات الرأسية إلي نوعين: محدبة و مقعرة. بصفة عامة يعتمد طول المنحني علي عدة عوامل مثل: معدل التغير في الانحدار بيم جزئي الطريق ، معدل السرعة علي الطريق ، طبوغرافيا الأرض ، درجة الطريق و نوعه ، مسافة الرؤية.



شكل (٧-٧) أنواع المنحنيات الرأسية

الأجزاء الرئيسية للمنحني الرأسي:

- طول المنحني (ل) وهو الطول الأفقي بين نهايتي المنحني الرأسي.
- معدلا الانحدار (ن١ ، ن٢) كل ١٠٠ متر وتكتبا في صورة نسبة مئوية أو في صورة قيم معلومة لكل مسافة أفقية وبإشارة محددة ، وأحيانا يعبر عن معدلا الانحدار بزاوية فرق الانحدار بين الخطين المستقيمين.
- معدل التغير في الانحدار (م)
- بداية و نهاية المنحني الرأسي هـ ، و
- قمة المنحني ب

طول المنحني:

ل = (ن١ – ن٢) ÷ معدل التغير (م) × ١٠٠ (٧-٢٠)

مع مراعاة إشارات الانحدار: موجبة لأعلي و سالبة لأسفل.

<u>مثال:</u>

يراد توصيل انحدار إلي أعلي قدره ٢.١% و انحدار إلي أسفل قيمته – ٠.٤% بمنحني رأسي بمعدل تغير في الانحدار قيمته ٠.١. فما طول هذا المنحني الرأسي؟

ل = [(ن١ – ن٢) ÷ معدل التغير (م)] × ١٠٠
= [(٢.١ – (-٠.٤)) ÷ ٠.١] × ١٠٠ = ٢٥٠٠ متر

معادلة القطع المكافئ لأي محورين متعامدين (س،ص) هي:

ص = أ $س^{٢}$ + ب س + ج　　　　(٧-٢١)

حيث:

أ = تفلطح المنحني فان كانت موجبه فأن المنحني مقعرا وان كانت سالبة فأن المنحني محدبا.

معدل تغير الانحدار:

م = $د^{٢}$ ص ÷ $د^{٢}$ س = ٢ أ = (ن١ – ن٢) ÷ ل　　　　(٧-٢٢)

الفرق بين منسوب نقطة علي المنحني الرأسي و منسوب النقطة المقابلة لها علي المماس = المقدار الثابت (أ) × مربع المسافة الأفقية للنقطة من نقطة التماس:

$ص_{ي}$ = أ $س^{٢}_{ي}$
= $ص_{هـ}$ ((س ي) ^{٢} ÷ (٠.٥ ل) ^{٢})
= ($س^{٢}_{ي}$ (ن١ – ن٢) ÷ ٢ ل　　　　(٧-٢٣)

ينصف المنحني الخط الرأسي الواصل بين نقطتي تقاطع المماسين و منتصف الوتر الواصل بين نقطتي التماس:

و ك = ٢ د ج　　　　(٧-٢٤)

إذا كانت هـ نقطة الابتداء تعتبر كنقطة الأصل فأن المعامل ج في معادلة القطع (المعادلة ٧-٢١) سيساوي صفر:

معادلة القطع بالنسبة لنقطة التماس:

ص = أ $س^{٢}$ + ب س　　　　(٧-٢٥)

العلاقة بين ن١ ، ن٢ ، ل ، $ص_{هـ}$ هي:

$ص_{هـ}$ = (ن١ - ن٢) × (ل÷ ٨)　　　　(٧-٢٦)

<u>مثال:</u>

منحني رأسي يصل بين انحدارين ن١ = - ١% ، ن٢ = + ١ متر لكل ٣٠٠ متر. فإذا كان منسوب المنحني عند منصف طوله يبلغ ١١٩.٣٥٠ متر ومنسوب نقطة تقاطع الانحدارين يساوي ١١٨.٩٥ متر. أحسب طول المنحني؟

ص هـ = - ١١٩.٣٥٠ + ١١٨.٩٥٠ = - ٠.٤٠ متر.

من المعادلة (٧-٢٦):

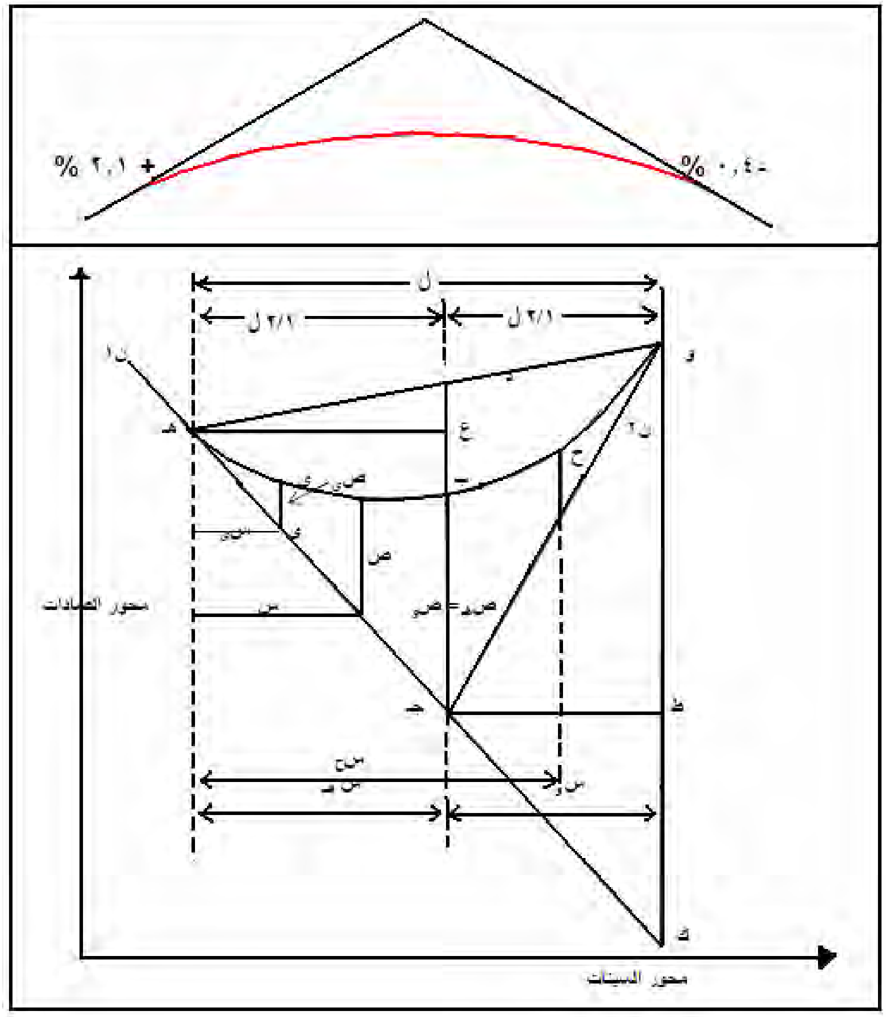
ص هـ = (ن١ - ن٢) × (ل÷ ٨)

أي أن:

ل = ٨ ص هـ ÷ (ن١ - ن٢)
= ٨ × (- ٠.٤) ÷ (-١ – ٣/١) (عبرنا عن ن٢ بقيمة ٣/١ بمئات الأمتار)
= (- ٣.٢٠) ÷ (-١.٣٣٣٣٣٣)
= ٢.٤ بمئات الأمتار
= ٢٤٠ متر

لحساب مناسيب نقاط المنحني (أنظر الشكل التالي):

١. نوجد منسوب أول وآخر نقطة (هـ ، و) علي المنحني بمعلومية معدل الانحدارين (ن١،ن٢) ومنسوب و
٢. نأتي بمنسوب د:
منسوب د = ٠.٥ (منسوب هـ + منسوب و)
٣. منسوب ب (علي المنحني) = ٠.٥ (منسوب د + منسوب نقطة التقاطع ج)
٤. المسافة ص هـ = منسوب ج – منسوب ب
٥. لحساب منسوب أي نقطة علي المنحني: ص هـ = أ س^{٢} هـ = أ (ل^{٢}/٤)
٦. يقسم المنحني إلي أقسام متساوية بحيث تكون نقطة ج نهاية أحد الأقسام وفي منتصف المنحني ، فإذا أعتبرنا هذه الأقسام هي وحدات الاحداثي السيني فيمكن الحصول علي المقدار الثابت أ.
٧. بالتعويض بالقيم المختلفة للمقدار (س) في المعادلة ص = أ س^{٢} نحصل علي قيم ص المقابلة ، وبطرح هذه القيم من مناسيب خط الانحدار نحصل علي مناسيب النقاط المختلفة علي المنحني الرأسي ، كما يمك تحقيق هذه القيم بإيجاد منسوب نقطة هـ.



شكل (٧-٨) أجزاء المنحني الرأسي

لتعيين أعلي نقطة أو أدني نقطة علي المنحني:

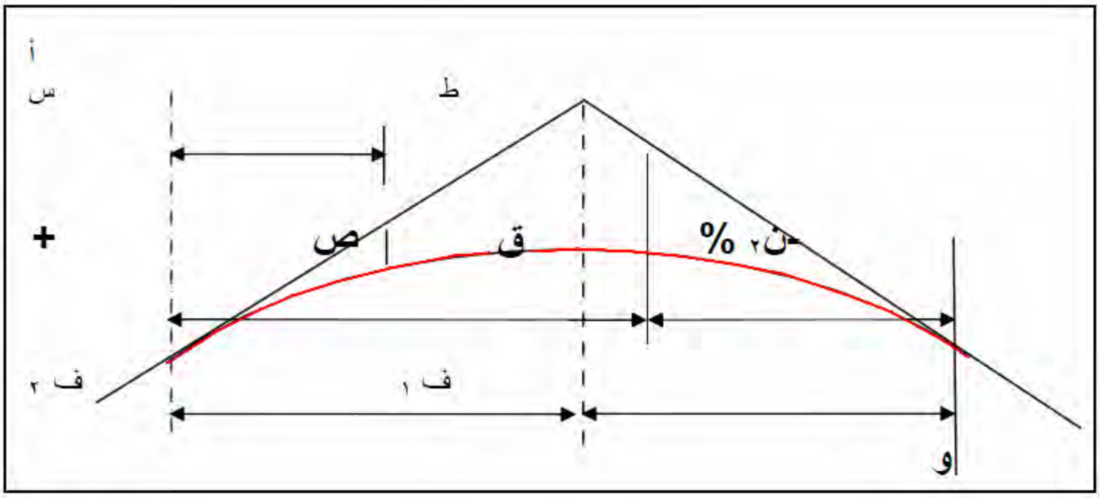
المسافة من أول المنحني حتى أعلي أو أدني نقطة:

ف = (ل ن١) ÷ (ن١ – ن٢) (٧-٢٧)

المسافة من نهاية المنحني حتى أعلي أو أدني نقطة:

ف = (ل ن٢) ÷ (ن١ – ن٢) (٧-٢٨)

منسوب قمة المنحني = منسوب ط (علي المماس) – $ص_{ق}$ (٧-٢٩)



شكل (٧-٩) إيجاد أعلي نقطة علي المنحني الرأسي

<u>مثال:</u>

لو كان انحدار المماسين لمنحني رأسي هما + ٣.٠٠% ، - ٢.٠٠% وطول المنحني ٤٠٠ متر ، أوجد أعلي نقطة علي هذا المنحني.

ف = (٤ × ٣) ÷ (٣ – (-٢)) = ٢.٤ بمئات الأمتار

ف١ = (٤ × ٢) ÷ (٣ – (-٢)) = ١.٦ بمئات الأمتار.

<u>مثال لتخطيط المنحني الرأسي:</u>

أوجد مناسيب النقاط المختلفة كل ٥٠ متر والواقعة علي المنحني الرأسي الذي يصل بين انحدارين +٣.٢% ، -٢.٥% علما بأن منسوب نقطة تقاطع الانحدارين هو ١٧١.٤٠ متر و طول المنحني ٤٠٠ متر.

منسوب نقطة التماس أ = ١٧١.٤٠ – ((٣.٢/١٠٠) × ٢٠٠) = ١٦٥.٠٠ متر

منسوب نقطة التماس ج = ١٧١.٤٠ – ((٢.٥/١٠٠) × ٢٠٠) = ١٦٦.٤٠ متر

نحسب مناسيب النقاط (من ١ إلي ٨) التي تقع علي المماس أ ب أو امتداده وعلي مسافات ملا منها يبلغ ٥٠ مترا ، أي النقاط التي تقع مباشرة فوق نقاط المنحني المراد إيجاد مناسبها.

منسوب أول نقطة علي المماس = ١٦٥.٠٠ + (٣.٢/١٠٠) × بعد النقطة عن أ
= ١٦٥.٠٠ + (٣.٢×١٠٠) × ٥٠ × عدد المحطات للنقطة
= ١٦٥.٠٠ + ١.٦ × عدد المحطات للنقطة

وهذا هو العمود ٢ في الجدول التالي.

منسوب نقطة د (منتصف الوتر أ ج) = ٠.٥ (١٦٥.٠٠ + ١٦٦.٤٠) = ١٦٥.٧٠ متر

منسوب نقطة هـ (منتصف المنحني) = ٠.٥ (١٧١.٤٠ + ١٦٥.٧٠) = ١٦٨.٥٥ متر

كما يمكن (للتحقيق) إيجاد منسوب هـ كالتالي:

ص $_{هـ}$ = ((٣.٢ – (-٢.٥) × ٤) / ٨ = ٢.٨٥ متر

منسوب هـ = ١٧١.٤٠ – ٢.٨٥ = ١٦٨.٥٥ متر

نحسب قيمة الثابت أ:

١٧١.٤٠ – ١٦٨.٥٥ = أ × (٤)^{٢}

وذلك باعتبار أم ل / ٢ = ٤ فترات كلا منها تساوي ٥٠ متر.

إذن: أ = ٠.١٧٨١

نحسب ص = أ س^{٢} للنقاط (العمود ٣ من الجدول التالي) وقد تم إعطاء كل إحداثي إشارة سالبة حيث أنها سوف تطرح من منسوب النقطة المقابلة علي المماس لكي تنتج مناسيب النقاط علي المنحني (العمود ٤).

التحقيق الحسابي:

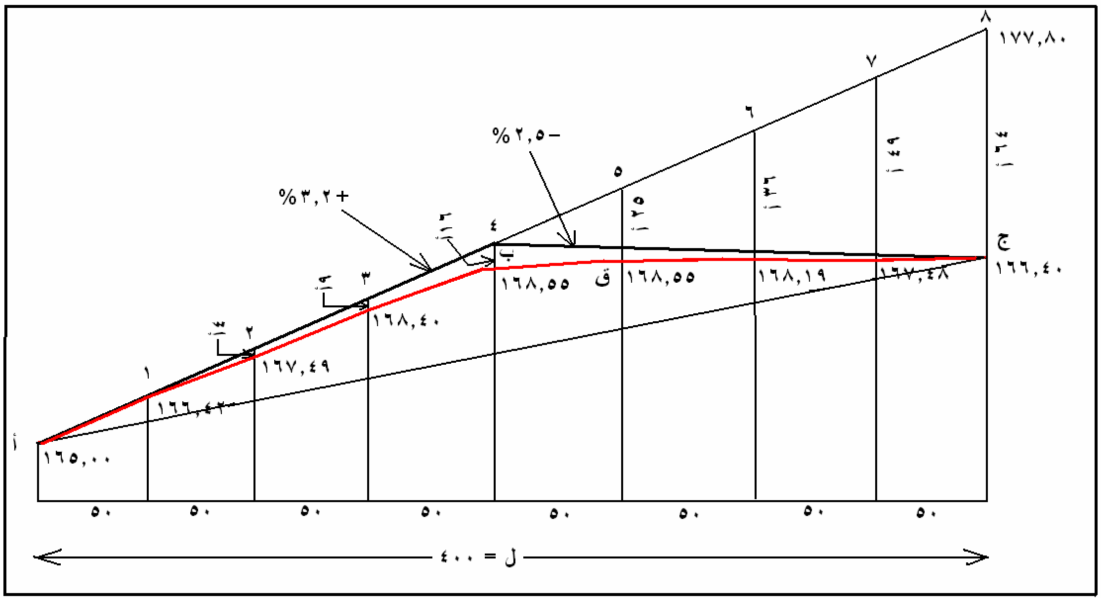
تحت الفروق الثانية (العمود ٥) يجب أن تكون متساوية ويجب مراعاة الإشارات عند إيجاد هذه الفروق.

المسافة الأفقية:

ف = ٤٠٠ × ٣.٢ / (٣.٢ + ٢.٥) = ٢٢٤.٦ متر

منسوب قمة المنحني:

ق = ١٦٥.٠٠ + ((٣.٢/١٠٠) × ٢٢٤.٦) – (٠.١٧٨١ × (٢٣٤.٦)^{٢} / (٥٠)^{٢})
= ١٦٥.٠٠ + ٧.١٩ – ٣.٥٩
= ١٦٨.٦٠ متر



شكل (٧-١٠) مثال للمنحني الرأسي

نقطة	المسافة	المناسيب علي المماس	الاحداثي ص = أس^{٢}	المناسيب علي المنحني	فروق المناسيب	
					الأولي	الثانية
صفر	صفر	١٦٥.٠٠		١٦٥.٠٠		
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (١)^{٢}		١.٤٣	
١	٥٠	١٦٦.٦٠ -	٠.١٧٨	١٦٦.٤٢		٠.٣٥
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٢)^{٢}		١.٠٧	
٢	١٠٠	١٦٨.٢٠ -	٠.٧١٢	١٦٧.٤٩		٠.٣٦
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٣)^{٢}		٠.٧١	
٣	١٥٠	١٦٩.٨٠ -	١.٦٠٢	١٦٨.٢٠		٠.٣٦
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٤)^{٢}		٠.٣٥	
٤	٢٠٠	١٧١.٤٠ -	٢.٨٤٨	١٦٨.٥٥		٠.٣٥
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٥)^{٢}		٠.٠٠	
٥	٢٥٠	١٧٣.٠٠ -	٤.٤٥١	١٦٨.٥٥		٠.٣٦
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٦)^{٢}		٠.٣٦	
٦	٣٠٠	١٧٤.٦٠ -	٦.٤٠٨	١٦٨.١٩		٠.٣٥
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٧)^{٢}		٠.٧١	
٧	٣٥٠	١٧٦.٢٠ -	٨.٧٢٢	١٦٧.٤٨		٠.٣٦
		١.٦٠	٠.١٧٨ × (٨)^{٢}		٠.٠٧	
٨	٤٠٠	١٧٧.٨٠ =	١١.٣٩٢	١٦٦.٤١		

الباب الثالث: رياضيات المساحة الجيوديسية

الفصل الثامن

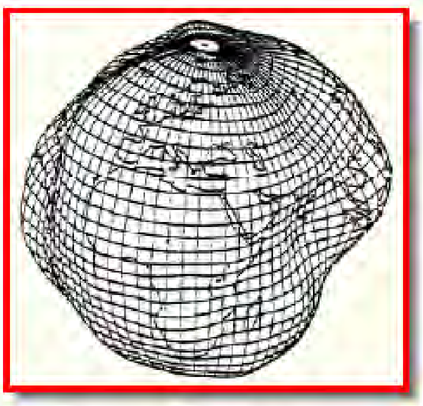
نظم الإحداثيات و التحويل بينها

٨-١ شكل الأرض

إن تحديد المواقع علي سطح الأرض يعني بداية أن نعرف ما هو الشكل الدقيق لهذا الكوكب الذي نعيش فوقه ، و ما هو المرجع الذي يمكننا أن نفترض أنه الأنسب لتمثيل الأرض رياضيا و خرائطيا. كما أن تحديد الموقع يكون من خلال قيم رياضية تعبر عنه وهي القيم التي نطلق عليها مصطلح "الإحداثيات Coordinates" علي اختلاف أنواعها و نظمها. لذلك يجب علي دارس الجيوديسيا أن يلم بأساسيات هذه الموضوعات الثلاثة ، وهو ما سنقوم بعرضه في هذا الفصل.

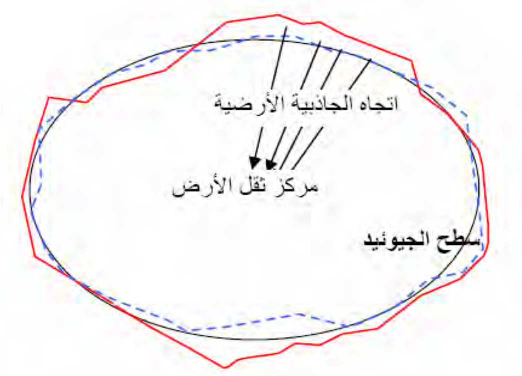
في بدايات المعرفة البشرية ظن الإنسان أن الأرض هي قرص صلب يطفو فوق سطح الماء ، إلي أن تطور التفكير العلمي للبشر قليلا وجاء العالم اليوناني فيثاغورث Pythagoras في القرن السادس قبل الميلاد وافترض أن الأرض كروية الشكل. وكانت أولي محاولات العلماء لتقدير حجم أو محيط هذه الكرة هي تجربة العالم الإغريقي أراتوستين التي سبق الإشارة إليها في الفصل الأول. وفي القرنين الخامس عشر و السادس عشر أيد كلا من الرحالة كولومبوس Columbus و ماجلان Magellan فكرة كروية الأرض من خلال رحلاتهما الشهيرة بالدوران حول الأرض. في عام ١٦٨٧ طور العالم الشهير نيوتن Newtown عدة مبادئ نظرية علمية وكان أهمها: أن الشكل المتوازن لكتلة مائعة متجانسة خاضعة لقوانين الجذب و تدور حول محورها ليس هو شكل الكرة كاملة الاستدارة لكنه شكل مفلطح قليلا باتجاه القطبين. وفي عام ١٧٣٥ قامت أكاديمية العلوم الفرنسية بتنظيم بعثتين لإجراء القياسات اللازمة للتأكد من هذه الفرضية وأثبتت النتائج فعلا أن الأرض مفلطحة وليست كروية الشكل تماما.

إننا نعيش علي سطح كوكب الأرض وعندما نريد أن نحدد أي موقع علي الأرض فنحن بحاجة إلي أن نقوم بتعريف هذا السطح – شكله و حجمه – لكي يمكننا من معرفة في أي مكان نحن نقع بالضبط. إن شكل السطح الطبيعي للأرض كما خلقه الله تعالي بما يضمه من قارات و محيطات و جبال و أودية و بحار ليس شكلا سهلا وليس منتظما لكي يمكن التعبير عنه بسهولة.



شكل (٨-١) الأرض غير منتظمة الشكل

بحث العلماء عن شكل افتراضي آخر للأرض يكون أقل تعقيدا واهتدوا إلي فكرة أنه طالما أن مساحة الماء في المحيطات و البحار تشكل حوالي ٧٠% من مساحة الأرض فأن شكل الأرض يكاد يكون هو الشكل المتوسط لسطح الماء (إذا أهملنا حركة سطح الماء بسبب التيارات البحرية و المد و الجزر) Mean Sea Level والمعروف اختصارا بأحرف MSL، وإذا قمنا بمد هذا السطح تحت اليابسة لنحصل علي شكل متكامل فأن هذا الشكل سيكون أقرب ما يكون للشكل الحقيقي للأرض. وتم إطلاق اسم الجيويد أو الجيوئيد Geoid علي هذا الشكل الافتراضي [يجب ملاحظة أن هناك فرق في حدود متر واحد فقط بين كلا من MSL و الجيويد إلا أنه في معظم التطبيقات الهندسية تتغاضي عن هذا الفرق و نعتبر أن كلا الشكلين أو المصطلحين يشيرا لنفس الجسم]. ولكن طبقا لمبدأ نيوتن السابق فأن شكل هذا الجيويد لن يكون منتظما لان سطح الجيويد يتعامد مع اتجاه قوة الجاذبية الأرضية وأيضا يخضع لقوة الطرد المركزية الناتجة عن دوران الأرض حول محورها ، وكلا القوتين تختلفان من مكان لآخر علي سطح الأرض بسبب عدم توزيع الكثافة بشكل منتظم (يختلف سمك القشرة الأرضية من ٦ إلي ٦- كيلومتر) . وبذلك نخلص إلي أن الجيويد (شكل ٨-٢) هو الشكل الحقيقي للأرض إلا أنه شكل معقد أيضا و يصعب تمثيله بمعادلات رياضية تمكننا من رسم الخرائط و تحديد المواقع عليه.



شكل (٨-٢) الجيويد: الشكل الحقيقي للأرض

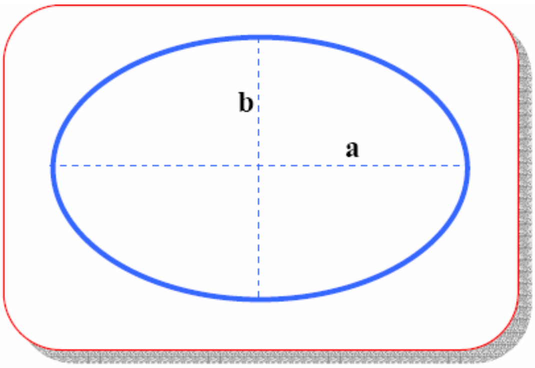
لتعقد الجيويد وصعوبة تمثيله بمعادلات رياضية أتجه العلماء إلي البحث عن أقرب الأشكال الهندسية المعروفة ووجدوا أن القطع الناقص أو الاليبس Ellipse هو الأقرب ، فإذا دار هذا الاليبس حول محوره فسينتج لنا مجسم القطع الناقص أو الاليبسويد أو الشكل البيضاوي Ellipsoid or Ellipsoid of Revolution ويعرف أيضا باسم الاسفرويد Spheroid (لكن اسم الاليبسويد هو الأكثر انتشارا وهو الذي سنستخدمه في هذا الكتاب). ربما يتبادر إلي الأذهان الآن سؤال: ما هو الفرق بين الاليبس و الدائرة أو بمعني آخر ما هو الفرق بين الاليبسويد و الكرة؟ بالنظر لشكل ٨-٣ نجد أن الاليبسويد مفلطح قليلا عند كلا القطبين بعكس الكرة التي تكون كاملة الاستدارة تماما ، أيضا الكرة لها قطر و احد له نفس القيمة في جميع الاتجاهات بينما نجد الاليبسويد له محورين مختلفين. للتعبير عن الاليبسويد يلزمنا معرفة عنصرين (لاحظ أن الكرة يعبر عنها بعنصر واحد فقط هو نصف قطرها):

- نصف المحور الأكبر (المحور في مستوي خط الاستواء) ويرمز له بالرمز a
- نصف المحور الأصغر (المحور بين كلا القطبين) ويرمز له بالرمز b

ويقوم البعض بالتعبير عن الاليبسويد بطريقة أخري من خلال العنصرين:

- نصف المحور الأكبر (المحور في مستوي خط الاستواء) ويرمز له بالرمز a
- معامل التفلطح flattening ويرمز له بالرمز f ويتم حسابه من المعادلة:

$$f = (a – b) / a \quad \text{or} \quad f = 1- (b / a) \qquad (8-1)$$

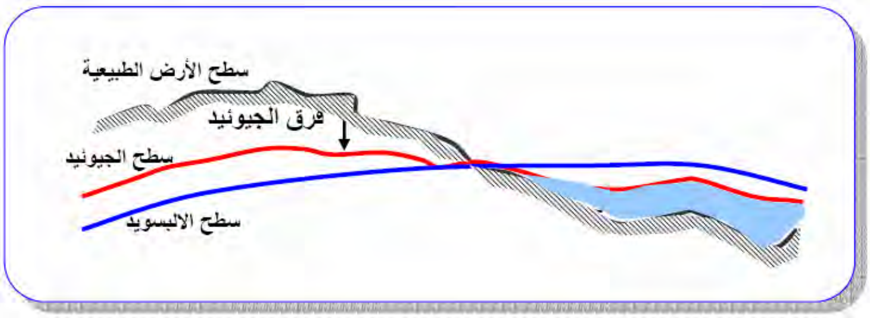


شكل (٨-٣) الاليبسويد

ويتميز شكل الاليبسويد بعدة خصائص مثل (شكل ٨-٤):

أ- سهولة إجراء الحسابات علي سطحه (حيث أنه شكل هندسي معروف).

ب- لا يختلف سطح الاليبسويد الرياضي عن سطح الجيويد الفيزيقي كثيرا (أكبر فرق بين كلاهما لا يتعدي ١٠٠ متر فقط. لاحظ أن الفرق بين الجيويد و الكرة يصل إلي ٢١ كيلومتر تقريبا).



شكل (٨-٤) العلاقة بين الجيويد و الاليبسويد

لكي يمكن تحديد المواقع علي سطح الأرض يلزمنا اختيار شكل رياضي يعبر عن شكل و حجم الأرض ذاتها وهو ما نطلق عليه اسم الشكل المرجعي Reference Surface. أحد هذه الأشكال المرجعية من الممكن أن يكون الكرة والتي كانت مستخدمة لفترة طويلة لتحديد المواقع التي لا تتطلب دقة كبيرة ولرسم الخرائط التي لا يزيد مقياسها عن ١ : مليون. أيضا للمساحات الصغيرة جدا (أقل من ٥٠ كيلومتر مربع) من الممكن اعتبار المستوي Plane شكلا مرجعيا وخاصة في تطبيقات المساحة المستوية Plane Surveying. أما لتحديد المواقع بدقة عالية أو لرسم الخرائط الدقيقة فأن الاليبسويد هو الشكل المرجعي المستخدم.

طوال القرنين الأخيرين تعددت محاولات علماء الجيوديسيا لتحديد أنسب اليبسويد يعبر عن شكل الأرض بأقرب صورة ممكنه. وكلما تجمعت قياسات جيوديسية جديدة لدي أحد العلماء أو الجهات الدولية تم حساب قيم جديدة لعناصر تعريف الاليبسويد (سواء a , b أو a , f) مما أدي لوجود العديد من نماذج الاليبسويد ، ويعرض الجدول ٨-١ بعضا من هذه النماذج.

كانت كل دولة عند بدء إقامة الهيكل الجيوديسي أو المساحي لها بغرض البدء في إنتاج الخرائط غالبا ما تختار أحدث اليبسويد – في ذلك الوقت – لتتخذه السطح المرجعي لنظام خرائطها. فإذا ظهر بعد عدة سنوات اليبسويد آخر لم يكن ممكنا – لأسباب تقنية و مادية – أن تقوم هذه الدولة بتغيير السطح المرجعي لها و إعادة إنتاج و طباعة كل خرائطها من جديد. لكن ما هو المرجع؟ من المعروف أن أي اليبسويد يكون أقرب ما يمكن لتمثيل سطح الأرض علي المستوي العالمي، أي أن الفروق بينه وبين الجيويد تختلف من مكان لمكان علي سطح الأرض لكنها أقل ما يمكن علي المستوي العالمي. لكن كل دولة عندما تعتمد اليبسويد معين تريد أن يكون الفرق بينه و بين الجيويد أقل ما يمكن في حدودها ولا تهتم إن كانت هذه الفروق كبيرة في مناطق أخري من العالم. لذلك كانت كل دولة تلجأ لتعديل وضع الاليبسويد المرجعي قليلا Re-Position لكي يحقق هذا الهدف. وفي هذه الحالة – أي بعد إجراء هذا التعديل البسيط – فلم يعد هذا الاليبسويد كما كان في الأصل لكنه صار في وضع مختلف ، وهنا نطلق عليه اسم مرجع أو مرجع جيوديسي أو مرجع وطني أو بيان A geodetic Datum, a local datum, or simply a datum. أي أن المرجع الوطني لأي دولة ما هو إلا اليبسويد عالمي قد تم تعديل وضعه بصورة أو بآخري ليناسب هذه الدولة ويكون أقرب تمثيلا لشكل الجيويد (الشكل الحقيقي للأرض) عند هذه الدولة. كما يجب الإشارة إلي أنه كلما قلت الفروق بين المرجع الوطني لدولة ما و الجيويد كلما زادت دقة الخرائط المرسومة اعتمادا علي هذا المرجع.

جدول (٨-١) بعض نماذج الاليبسويد المستخدمة عالميا

اسم الاليبسويد	نصف المحور الأكبر a بالمتر	نصف المحور الأصغر b بالمتر	الدولة التي تستخدمه
Helmert 1906	٦٣٧٨٢٠٠	٦٢٥٦٨١٨	مصر
Clarke 1866	٦٣٧٨٢٧٤	٦٣٥٦٦٥١	أمريكا الشمالية
Bassel 1841	٦٣٧٧٣٩٧	٦٣٥٦٠٧٩	وسط أوروبا
Airy 1830	٦٣٧٧٥٦٣	٦٣٥٦٢٥٧	بريطانيا
WGS72	٦٣٧٨١٣٥	٦٣٥٦٧٥٠	عالمي
WGS84	٦٣٧٨١٣٧	٦٣٥٦٧٥٢	عالمي

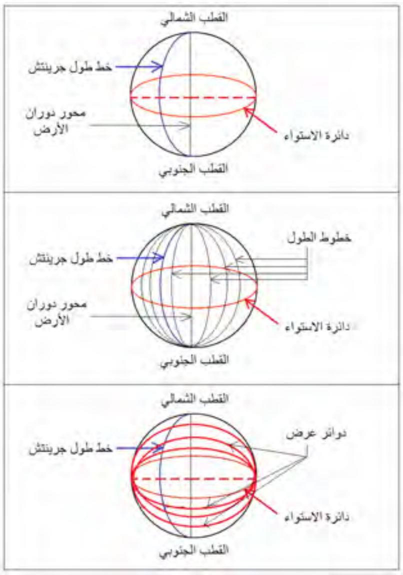
٨-٢ نظم الإحداثيات

الإحداثيات Coordinates هي القيم التي بواسطتها نعبر عن موقع معين علي سطح الأرض أو علي الخريطة. وتتعدد أنظمة الإحداثيات تبعا لاختلاف السطح المرجعي الذي يتم تمثيل المواقع عليه. فعند اختيار المستوي كسطح مرجعي (مثل الخريطة) فأن الإحداثيات تكون إحداثيات مستوية أو مسقطة أو ثنائية الأبعاد (Two-Dimensional (or 2D Coordinates. ويرجع اسم ثنائية الأبعاد إلي أن كل نقطة – علي الخريطة مثلا – يلزمها قيمتين لتحديد موقعها وليكن مثلا س ، ص. بينما عند اعتماد الكرة أو الاليبسويد كسطح مرجعي فأننا نتعامل مع نوع الإحداثيات الفراغية أو الإحداثيات ثلاثية الأبعاد -Three Dimensional (or 3D) Coordinates حيث يجب إضافة ارتفاع النقطة عن سطح المرجع كبعد ثالث لتحديد موقعها الدقيق ، أي نحتاج لمعرفة القيم الثلاثة س ، ص ، ع لكل موقع. وفي حالة الكرة تسمي الإحداثيات باسم الإحداثيات الكروية Spherical Coordinates بينما في حالة الاليبسويد تسمي بالإحداثيات الجيوديسية Geodetic Coordinates أو الإحداثيات الجغرافية Geographic Coordinates أو الإحداثيات الاليبسويدية Ellipsoidal Coordinates. كما توجد إحداثيات أحادية البعد -One Dimensional (or 1D) Coordinates وهي غالبا التي تعبر فقط عن ارتفاع النقطة من سطح الشكل المرجعي المستخدم. وفي التطبيقات الجيوديسية و الجيوفيزيقية عالية الدقة توجد إحداثيات رباعية الأبعاد Four-Dimensional (or 4D) Coordinates حيث يتم تحديد موقع النقطة في زمن محدد بحيث تكون إحداثياتها هي س ، ص ، ع ، ن حيث البعد الرابع "ن" يعبر عن زمن قياس هذه الإحداثيات لهذا الموقع. وسنستعرض بعض أنظمة الإحداثيات بالتفصيل في الأجزاء التالية.

منذ قرون مضت أبتكر العلماء طريقة لتمثيل موقع أي نقطة علي سطح الأرض (باعتبار أن الأرض كرة) وذلك عن طريق:

- تم اتخاذ الخط الأساسي الأفقي هو تلك الدائرة العظمي (أي التي تمر بمركز الأرض) والتي تقع في منتصف المسافة بين القطبين وسميت بدائرة الاستواء.
- أتخذ الخط الأساسي الرأسي ليكون هو نصف الدائرة التي تصل بين القطبين الشمالي و الجنوبي وتمر ببلدة جرينتش بانجلترا (شكل ٨-٥ أ).
- قسمت دائرة الاستواء إلي ٣٦٠ قسما متساويا و رسم علي سطح الأرض ٣٦٠ نصف دائرة (وهمية أو اصطلاحية) تصل بين القطبين وتمر بأحدي نقاط التقسيم علي دائرة الاستواء ، وكل نصف دائرة تسمي خط طول Longitude. ويتضح من ذلك أن الزاوية عند مركز الأرض بين نقطتي تقسيم متجاورتين تساوي ١ درجة (يرمز للدرجة بالرمز ^{o}١) لان ٣٦٠ درجة تقابل ٣٦٠ قسما. وتم ترقيم خط طول جرينتش بالرقم صفر وخط الطول المجاور له من جهة الشرق ^{o}١ شرق ، ثم ^{o}٢ شرق ، .... إلي ^{o}١٨٠ شرق وبنفس الطريقة للخطوط الواقعة غرب جرينتش من ^{o}١ غرب ، إلي ^{o}١٨٠ غرب. وتكون زاوية خط الطول (شكل ٨- ٥ ب) هي الزاوية الواقعة في مستوي دائرة الاستواء والمحصورة بين ضلعين يمر أحدهما بخط طول جرينتش بينما يمر الآخر بخط طول النقطة ذاتها.
- تم تقسيم خط الطول الأساسي (جرينتش) إلي ١٨٠ قسما متساويا ورسم علي الأرض دوائر صغري وهمية (الدائرة الصغرى هي التي لا تمر بمركز الأرض) توازي دائرة الاستواء وتمر كل دائرة منها بأحدي نقاط تقسيم خط طول جرينتش. وبذلك تكون الزاوية عند مركز الأرض بين نقطتين متجاورتين من نقاط التقسيم تساوي ^{o}١ لان

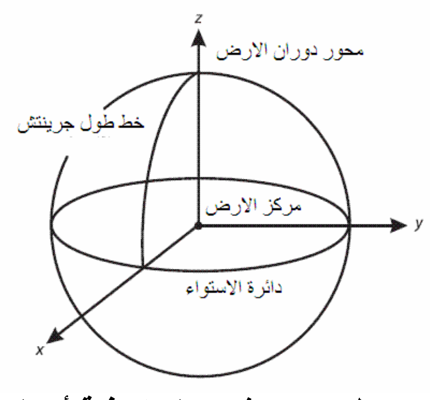
١٨٠ درجة تقابل ١٨٠ قسما ، وأطلق علي هذه الدوائر اسم دوائر العرض ومنهم ٩٠ دائرة شمال دائرة الاستواء و ٩٠ دائرة جنوبه. وبنفس الأسلوب تم ترقيم دائرة الاستواء بالرقم صفر ودائرة العرض المجاور لها من جهة الشمال ١° شمال ، ثم ٢° شمال ، .... إلي ٩٠° شمال وبنفس الطريقة للدوائر الواقعة جنوب دائرة الاستواء من ١° جنوب ، إلي ٩٠° جنوب. زاوية العرض Latitude هي الزاوية الواقعة في مستوي دائرة من دوائر الطول و رأسها عند مركز الدائرة و ضلعها الأساسي يمر في مستوي الاستواء و الضلع الآخر يمر في دائرة من دوائر العرض (شكل ٨-٥ ج).



شكل (٨-٥) تحديد المواقع علي الكرة

٨-٢-١ الإحداثيات الجغرافية أو الجيوديسية

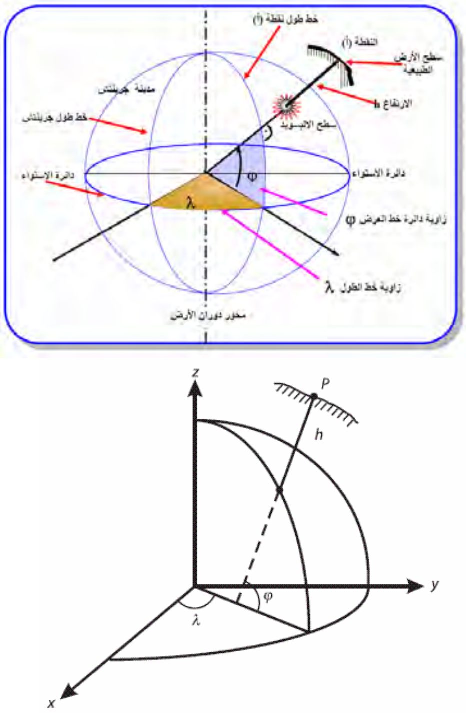
نظام الإحداثيات الجيوديسية هو أحد نظم الإحداثيات الذي مركزه هو مركز الأرض ومحاوره مثبته مع الأرض أثناء دورانها ولذلك يطلق عليه نظام مركزي أرضي ثابت Earth-Centered Earth-Fixed أو اختصارا ECEF. مركز النظام يقع في مركز جاذبية الأرض، وينطبق محوره الرأسي z مع محور دوران الأرض ، يتجه محوره الأفقي الأول x ناحية خط طول جرينتش بينما محوره الأفقي الثاني y يكون عموديا علي محور x.



شكل (٨-٦) نظام الإحداثيات الجغرافية أو الجيوديسية

يتم تمثيل موقع أي نقطة في هذا النظام بثلاثة قيم أو ثلاثة إحداثيات ، أي أن هذا النظام ثلاثي الأبعاد 3D:

- خط الطول Longitude ويرمز له بالرمز اللاتيني λ (ينطق لامدا) ، وهو الزاوية المقاسة في مستوي دائرة الاستواء بين خط طول جرينتش (وهو خط الطول الذي أصطلح دوليا أن يكون رقم صفر) و خط طول النقطة المطلوبة.
- دائرة العرض Latitude ويرمز له بالرمز اللاتيني ϕ (ينطق فاي) ، وهي الزاوية في المستوي الرأسي والتي يصنعها الاتجاه العمودي المار بالنقطة المطلوبة مع مستوي دائرة الاستواء (يلاحظ في الشكل أن الاتجاه العمودي علي سطح الاليبسويد لا يمر بمركز الاليبسويد عكس حالة الكرة حيث يمر العمودي علي سطح الكرة بمركزها).
- الارتفاع عن سطح الاليبسويد ويرمز له بالرمز h ويسمي الارتفاع الجيوديسي أو الارتفاع الاليبسويدي Geodetic or Ellipsoidal Height



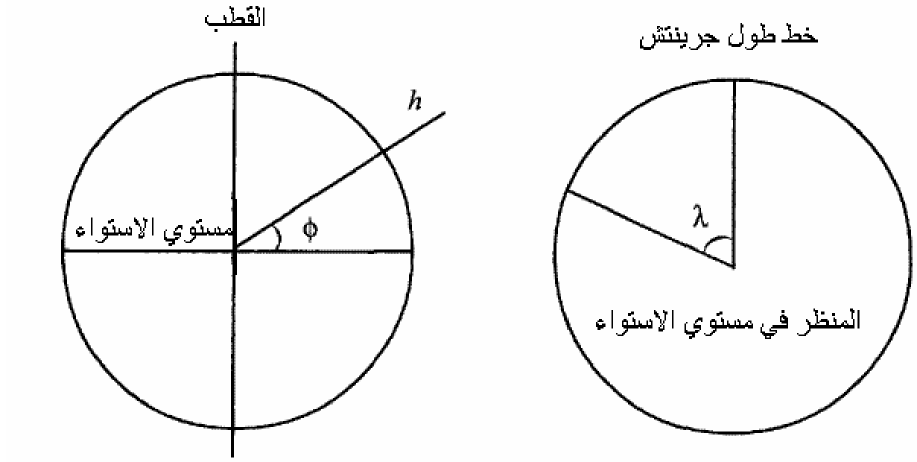
شكل (٨-٧) الإحداثيات الجغرافية أو الجيوديسية

وتوجد عدة نظم للوحدات المستخدمة في التعبير عن خطوط الطول و دوائر العرض أشهرها نظام الوحدات الستيني ، وفيه يتم تقسم الدائرة الكاملة إلي ٣٦٠ درجة (رمز الدرجة هو ^{o}) ثم تقسم الدرجة إلي ٦٠ جزء كلا منهم يسمي الدقيقة (رمز الدقيقة هو ') ثم لاحقا تقسم الدقيقة الواحدة إلي ٦٠ جزء يسمي الواحد منهم بالثانية (رمز الثانية هو "). كمثال: خط الطول 30^{o} 45' 52.3" يعني أن موقع هذه النقطة عند ٣٠ درجة و ٤٥ دقيقة و ٥٢.٣ ثانية.

تكون خطوط الطول أما شرق خط طول جرينتش (يرمز لها بإضافة حرف ق أو E) أو غرب جرينتش (يرمز لها بإضافة حرف غ أو W). أما بالنسبة لدوائر العرض فتكون أما شمال دائرة الاستواء (يرمز لها بإضافة حرف ش أو N) أو جنوب خط الاستواء (يرمز لها بإضافة حرف ج أو S).

٨-٢-٢ الإحداثيات الكروية

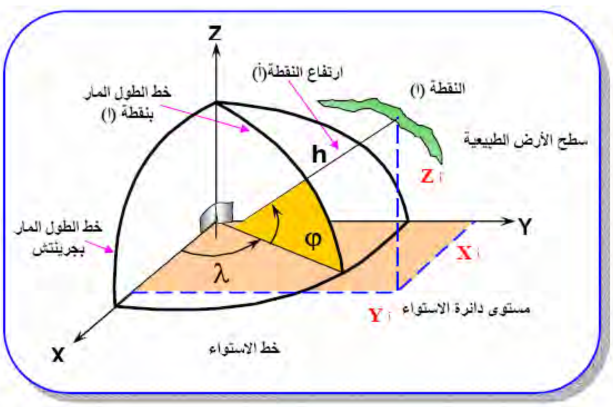
يشبه نظام الإحداثيات الكروية Spherical Coordinates نظام الإحداثيات الجيوديسية أو الجغرافية ألا في اختلاف واحد فقط ألا وهو أن السطح المرجعي هنا هو الكرة و ليس الاليبسويد (شكل ٨-٨). يلاحظ في الشكل (خاصة لقياس دائرة العرض ϕ) أن الاتجاه العمودي علي سطح الكرة يمر بمركزها عكس حالة الاليبسويد حيث لا يمر العمودي علي سطح الاليبسويد بمركزه.



شكل (٨-٨) الإحداثيات الكروية

٨-٢-٣ الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية أو الفراغية أو الديكارتية

هو نظام إحداثيات مشابه تماما في تعريفه لنظام الإحداثيات الجيوديسية ألا أنه يتميز أن إحداثياته الثلاثة تكون طولية (أي بالمتر أو الكيلومتر) و ليس منحنية (بالدرجات) مما يجعله أسهل في التعامل وخاصة في الحسابات ، وقد أبتكره العالم الفرنسي ديكارت في القرن السابع عشر. نقطة الأصل لنظام الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية Cartesian Geodetic Coordinates هي مركز الأرض ومحوره الأول X ينشأ من تقاطع مستوي خط الطول المار بجرينتش مع مستوي دائرة الاستواء ومحوره الثاني Y هو العمودي علي محور X بينما المحور الثالث (الرأسي) Z هو محور دوران الأرض و الذي يمر بمركز الأرض وكلا القطبين. ويعبر عن موقع كل نقطة بثلاثة إحداثيات: X, Y, Z (شكل ٨-٩).



شكل (٨-٩) الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية

٨-٢-٤ الإطار المرجعي الأرضي العالمي

نلاحظ أن المحور الرأسي في نظم الإحداثيات التي تحدثنا عنها حتى الآن كان يعرف علي أنه ينطبق مع محور دوران الأرض ، وهذا بافتراض أن محور دوران الأرض ثابت. هذا الأساس الفرضي ربما يكون مناسبا لمعظم تطبيقات تحديد المواقع – بما فيها التطبيقات الجيوديسية - التي تتطلب دقة سنتيمتر أو أكبر. لكن علماء الجيوديسيا أثبتوا منذ سنوات بعيدة أن محور دوران الأرض ليس ثابتا بصورة تامة ، لكنه يتحرك من عام لآخر في حركة أشبه بحركة النحلة (لعبة الأطفال الشهيرة!) ، وبالتالي فأن تعريف أو تحديد محور دوران الأرض يتغير من فترة زمنية لأخري ، ومع أن هذا التغير بسيط جدا جدا (سنتيمترات فقط) إلا أنه يجب أخذه في الاعتبار في حالة تحديد نظام إحداثيات عالي الدقة وخاصة للتطبيقات الجيوديسية التي تتطلب دقة ملليمترات (مثل متابعة و رصد حركة القشرة الأرضية). وبناءا عليه فقد تم تطوير فكرة الإطار المرجعي الأرضي العالمي International Terrestrial Reference Frame أو المعروف اختصارا باسم ITRF ، حيث تقوم احدي المنظمات الجيوديسية الدولية بتحديد محور دوران الأرض كل ٣ سنوات وذلك من خلال تجميع و تحليل القياسات الجيوديسية الدقيقة الموزعة علي جميع أنحاء الأرض. وبالتالي فأن هذا النظام من نظم الإحداثيات من الممكن اعتباره من الإحداثيات رباعية الأبعاد 4D حيث يتم تحديد ITRF طبقا لسنة epoch معينة. كمثال نجد: ITRF1990 , ITRF1995, ITRF2000, and ITRF2005.

٨-٣ التحويل بين الإحداثيات الجغرافية

يمكن باستخدام مجموعة المعادلات التالية تحويل الإحداثيات الجيوديسية أو الجغرافية (ϕ, λ, h) إلي الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية (X, Y, Z):

$$\begin{aligned} X &= (c + h) \cos\phi \cos\lambda \\ Y &= (c + h) \cos\phi \sin\lambda \\ Z &= [\, h + c\,(1-e^2)\,] \sin\phi \end{aligned} \qquad (8\text{-}2)$$

حيث c يسمي نصف قطر التكور radius of curvature ، e تسمي المركزية الأولي first eccentricity ويتم حسابهما كالتالي:

$$c = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\phi)}} \qquad (8\text{-}3)$$

$$e = [\sqrt{(a^2 - b^2)}\,] / a \qquad (8\text{-}4)$$

وأيضا:

$$e = \sqrt{(2f - f^2)}$$

أما للتحويل من الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية (X, Y, Z) إلي الإحداثيات الجيوديسية أو الجغرافية (ϕ, λ, h) فأحد الحلول يتمثل في المعادلات التالية:

$$\tan \lambda = Y / X$$

$$\tan \phi = \frac{Z / \sqrt{(X^2 + Y^2)}}{1 - e^2 (c / (c + h))} \qquad (8-5)$$

$$h = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2)}}{\cos \phi} - c$$

وأيضا يمكن استخدام:

$$\tan \phi = \frac{Z}{D (1 - e^2)}$$

حيث:

$$D = (X^2+Y^2)^{0.5}$$

نلاحظ في هذه المعادلات أننا نحتاج لمعرفة قيمة c لكي نستطيع حساب قيمة ϕ و h ، لكن لنحسب قيمة c من المعادلة 8-٣ فأننا نحتاج لمعرفة قيمة ϕ ! ولذلك يتم حساب هذا النوع من التحويل بطريقة تكرارية Iterative ، حيث نبدأ باستخدام قيمة تقريبية لدائرة العرض ϕ ونحسب قيمة تقريبية لنصف قطر التكور c ثم نأخذ قيمة c هذه لنحسب منها قيمة جديدة ϕ وهكذا لعدد من المرات إلي أن نجد عدم وجود أي فرق جوهري Significant بين قيمتين متتاليتين لدائرة العرض ϕ.

مثال ١:

أحسب الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية للنقطة A التي لها إحداثيات جيوديسية علي المرجع الوطني الأمريكي NAD38 كالتالي:

$$\phi = 43^o\ 15'\ 46.289'',\ \lambda = -89^o\ 59'\ 42.164'',\ h = 1382.618\ m$$

التفلطح flattening للمرجع الوطني الأمريكي NAD83: f = ٢٩٨.٢٥٧٢٢٣٥٦٣/١

ومن ثم فأن المركزية الأولي لهذا المرجع الجيوديسي يمكن حسابها كالتالي:

$$e = \sqrt{(2f - f^2)} = 0.006694379990$$

إذن: c يسمي نصف قطر التكور سيكون كالتالي:

$$c = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)}} = 6388188.252 \text{ m}$$

وتكون الإحداثيات الكارتيزية للنقطة كالتالي:

$X = (c + h) \cos \phi \cos \lambda = 402.3509$ m
$Y = (c + h) \cos \phi \sin \lambda = -4652995.3011$ m
$Z = [h + c (1-e^2)] \sin \phi = 4349760.7775$ m

<u>مثال ٢:</u>

أحسب الإحداثيات الجيوديسية للنقطة B التي لها إحداثيات جيوديسية كارتيزية علي المرجع الوطني الأمريكي NAD38 كالتالي:

X = 12046.5808 m
Y = -4649394.0826 m
Z = 4353160.0634 m

$\lambda = \tan^{-1} (Y / X) = -89^o\ 51'\ 05.5691''$

$D = (X^2 + Y^2)^{0.5} = 4649409.6889$ m

القيمة التقريبية لدائرة العرض في <u>التكرار الأول</u>:

$$\phi_o = \tan^{-1} \frac{Z}{D (1 - e^2)} = 43^o\ 18'\ 26.2228''$$

ثم نستخدمها لحساب القيمة التقريبية لنصف قطر التكور:

a (of NAD83) = 6378137.0 m
e (of NAD83) = $\sqrt{(2f - f^2)} = 0.006694379990$

$$c_o = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)}} = 6388204.8545 \text{ m}$$

ثم نستخدم هذه القيمة لحساب قيمة جديدة لدائرة العرض في <u>التكرار الثاني</u>:

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{Z}{D (1 - e^2)} = 43^o\ 18'\ 26.1030''$$

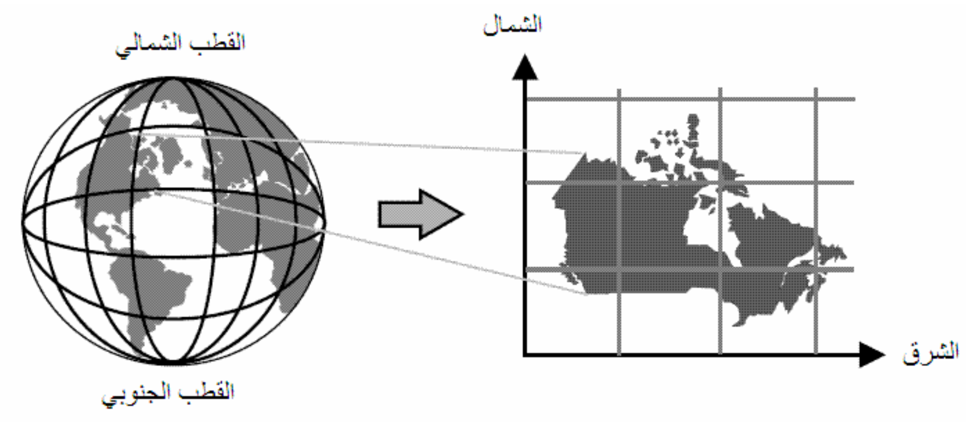
$$c_1 = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \phi)}} = 6388204.8421 \text{ m}$$

وأخيرا نحسب قيمة الارتفاع الجيوديسي:

$$h = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2)}}{\cos \phi} - c = 1103.101 \text{ m}$$

٨-٤ إسقاط الخرائط

إسقاط الخرائط Map Projection هو العملية الرياضية التي تمكننا من تحويل الإحداثيات علي مجسم الأرض - سواء كان الشكل المرجعي الذي يمثل الأرض هو الكرة أو الاليبسويد- (أي إحداثيات ثلاثية الأبعاد) إلي إحداثيات ممثلة علي سطح مستوي وهو الخريطة (أي إحداثيات ثنائية الأبعاد أو إحداثيات شبكية Grid Coordinates). أو بمعني آخر: هو العملية التي تمكننا من تحويل قيم خط الطول و دائرة العرض لموقع إلي الاحداثي الشرقي و الاحداثي الشمالي المطلوبين لتوقيع هذا الموقع علي الخريطة (شكل ٨-١٠). ويسمي الشكل الناتج عن عملية الإسقاط بالمسقط.



شكل (٨-١٠) عملية إسقاط الخرائط

تنقسم مساقط الخرائط إلي ٤ مجموعات رئيسية:

أ- المساقط الاسطوانية Cylindrical Projections: تنشأ من إسقاط سطح الأرض علي اسطوانة والتي أما تمس الأرض رأسيا أو تقطعها أو تمس الأرض عرضيا أو بصورة مائلة.

ب- المساقط المخروطية Conical; Projection: تنشأ من إسقاط سطح الأرض علي مخروط والذي أما يمس الأرض رأسيا أو يقطعها.

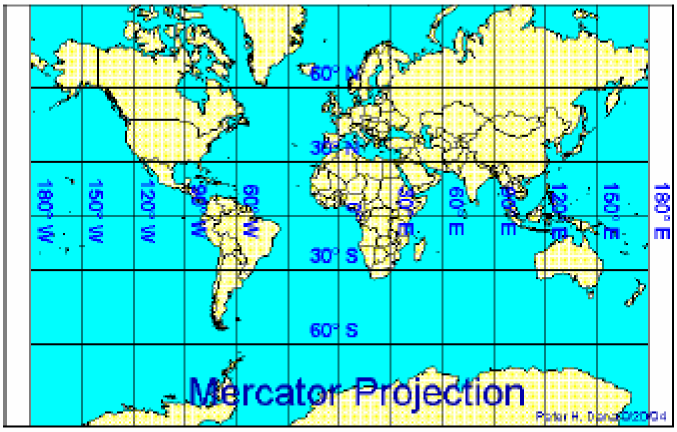
ت- المساقط السمتية أو المستوية أو الاتجاهية Azimuthal Projection: تنشأ من إسقاط سطح الأرض علي مستوي والذي أما يمس الأرض رأسيا عند نقطة محددة أو يقطعها في دائرة.

ث- مساقط أخري خاصة.

وفي الجزء التالي سنستعرض بعض نماذج مساقط الخرائط الشهيرة:

مسقط ميريكاتور Mercator Projection:

مسقط أسطواني يحقق شرط أن خطوط الطول و دوائر العرض تتقاطع في زوايا قائمة تماما. يكون المقياس scale صحيحا عند دائرة الاستواء أو عند دائرتي عرض قياسيتين Standard Parallels علي مسافات متساوية من الاستواء. غالبا يستخدم هذا المسقط في الخرائط البحرية.



شكل (٨-١١) مسقط ميريكاتور

مسقط ميريكاتور المستعرض Transverse Mercator Projection:

ينتج هذا المسقط من إسقاط الأرض علي اسطوانة تمسها عند خط طول مركزي Central Meridian. وغالبا يستخدم هذا المسقط للمناطق التي تمتد في اتجاه شمال-جنوب أكبر من امتدادها في اتجاه شرق-غرب. يزداد التشوه (في المقياس و المسافة و المساحة) كلما ابتعدنا عن خط الطول المركزي ، ولذلك نلجأ إلي فكرة الشرائح عند استخدام هذا المسقط حيث يكون عرض الشريحة الواحدة – في اتجاه الشرق – ثلاثة أو أربعة درجات من خطوط الطول بحيث لا يكون مقدار التشوه كبيرا عند أطراف الشريحة التي يقع خط طولها المركزي في منتصفها. مسقط ميريكاتور المستعرض مستخدم في خرائط الكثير من دول العالم مثل مصر و بريطانيا.

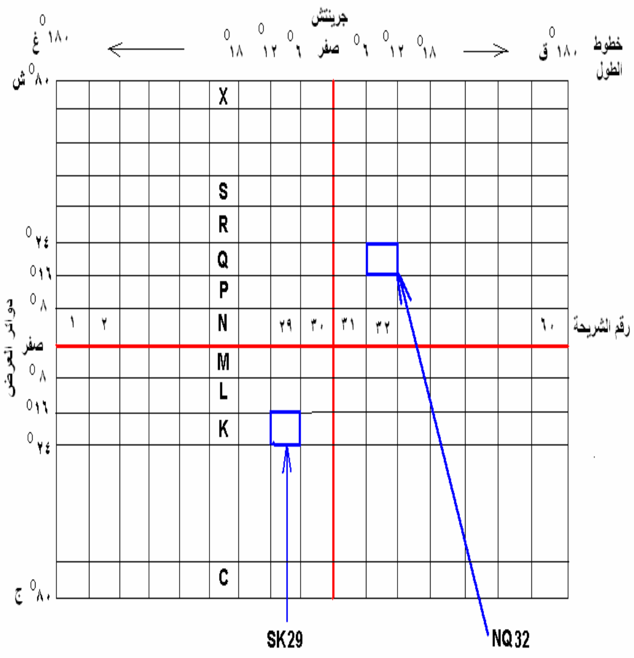
مسقط ميريكاتور المستعرض العالمي Universal Transverse Mercator Projection:

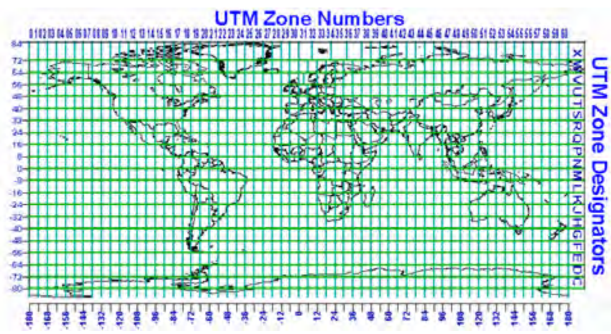
يعد أشهر أنواع مساقط الخرائط علي المستوي العالمي و يرمز له اختصارا بأحرف UTM. كما زادت أهميته في السنوات الأخيرة بسبب أنه أحد المساقط المستخدمة في أجهزة تقنية النظام العالمي لتحديد المواقع GPS.

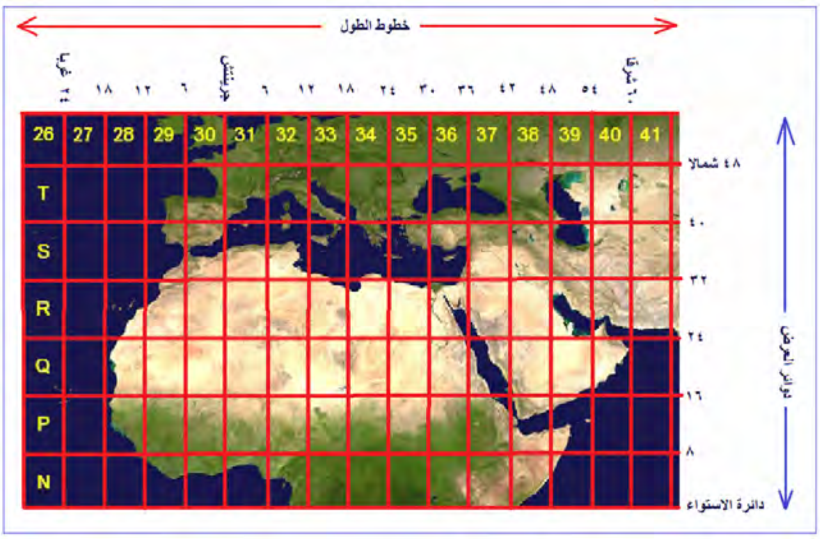
- يعتمد مسقط UTM علي إيجاد طريقة لرسم خرائط العالم كله وذلك عن طريق تقسيم الأرض إلي ٦٠ شريحة zones كلا منها يغطي **٦ درجات** من خطوط الطول بحيث يكون لكل شريحة مسقط UTM له خط طول مركزي Central Meridian يقع في مركز هذه الشريحة.

- تمتد شرائح مسقط UTM من دائرة العرض ٨٠ جنوبا إلي دائرة العرض ٨٤ شمالا.
- ترقم الشرائح من رقم ١ إلي رقم ٦٠ بدءا من خط الطول ^{o}١٨٠ غرب ، بحيث تمتد الشريحة الأولي من ^{o}١٨٠ غرب إلي ^{o}١٧٤ غرب ويكون خط طولها المركزي meridian central عند ^{o}١٧٧ غرب.
- تقسم كل شريحة طولية إلي مربعات كل **<u>٨ درجات</u>** من دوائر العرض.
- يكون هناك حرف خاص – كاسم - لكل مربع من هذه المربعات ، وتبدأ الحروف من حرف **<u>C</u>** جنوبا إلي حرف X شمالا مع **<u>استبعاد</u>** حرفي I و O (لقرب الشبه بينهما وبين الأرقام الانجليزية**!**).
- يكون معامل المقياس scale factor مساويا ٠.٩٩٩٦ عند خط الطول المركزي ، بحيث مع ازدياد التشوه كلما بعدنا عن خط الطول المركزي فأن أقصي قيمة لمعامل القياس عند أطراف الشريحة ستكون ١.٠٠٠٩٧ عند خط الاستواء أو ١.٠٠٠٢٩ عند دائرة عرض ^{o}٤٥ ش.

مسقط ميريكاتور المستعرض مستخدم في خرائط الكثير من دول العالم مثل مصر و بريطانيا (شكل ٨-١٢).



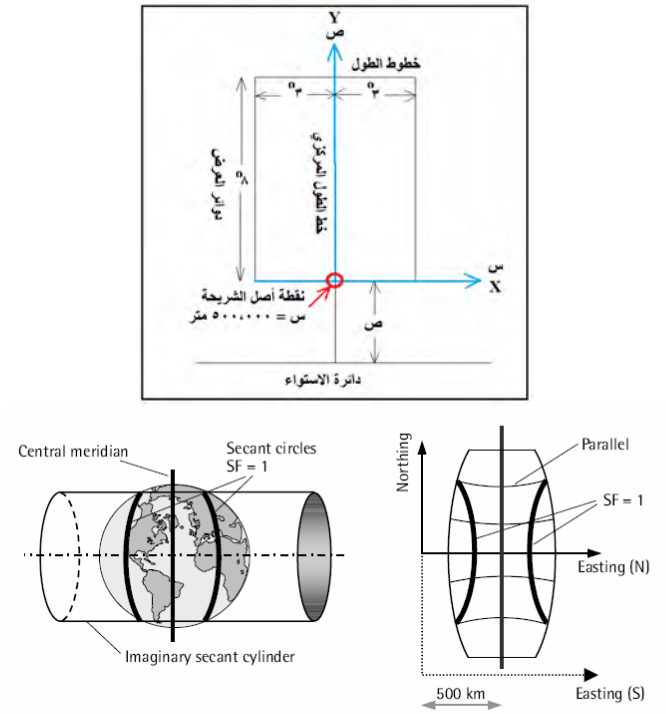




شكل (٨-١٢) مسقط ميريكاتور المستعرض

يتكون نظام الإحداثيات المسقطة في UTM من:

- نقطة الأصل (صفر ، صفر) للشريحة تقع في تقاطع خط الطول المركزي للشريحة مع دائرة الاستواء.
- الاحداثي السيني X في اتجاه الشرق.
- الاحداثي الصادي Y في اتجاه الشمال.
- تعطى قيمة إحداثيات شرقية زائفة False Easting لنقطة الأصل بقيمة ٥٠٠،٠٠٠ متر (لذلك فأن الاحداثي السيني لا يزيد عن ٦ خانات).
- لا تعطى أي قيمة إحداثيات شمالية زائفة False Easting لنقطة الأصل، أي أن قيمة الصفر في اتجاه الشمال تكون بالفعل عند دائرة الاستواء (وبذلك فأن الاحداثي الصادي قد يصل إلي ٧ خانات).



شكل (٨-١٣) شرائح مسقط ميريكاتور المستعرض العالمي

لا يمكن ضم شريحتين من شرائح UTM في خريطة واحدة (أو في ملف رقمي واحد) والسبب في ذلك أن نقطة أصل كل شريحة تأخذ الاحداثي السيني المفروض وهو ٥٠٠،٠٠٠ متر، مما سيجعل الإحداثيات الشرقية X للمعالم (المختلفة) علي كلا الخريطتين تتكرر في كلا الشريحتين.

تتكون معادلات التحويل من الإحداثيات الجغرافية (خط الطول و دائرة العرض) إلي الإحداثيات المترية بنظام UTM من عدة معادلات ليست بسيطة ولا يمكن حسابها بآلة حاسبة بل تحتاج لبرنامج كمبيوتر لإتمامها. الشكل التالي يقدم هذه المعادلات بصورة شاملة دون الدخول في تفاصيلها الكاملة.

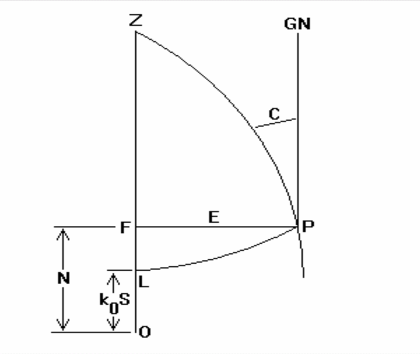
تجدر الإشارة لوجود بعض المواقع علي شبكة الانترنت التي تقدم خدمات آنية on-line لإجراء هذه الحسابات و تحويل الإحداثيات، ومنهم علي سبيل المثال:

http://www.rcn.montana.edu/resources/tools/coordinates.aspx

http://gis.dep.wv.gov/convert/llutm_conus.php

http://www.geod.nrcan.gc.ca/tools-outils/tools_info_e.php?apps=gsrug

http://home.hiwaay.net/~taylorc/toolbox/geography/geoutm.html



P = point under consideration
F = foot of perpendicular from P to the central meridian.
The latitude of F is called the *footprint latitude*.
O = origin (on equator)
OZ = central meridian
LP = parallel of latitude of P
ZP = meridian of P
OL = k_0S = meridional arc from equator
LF = ordinate of curvature
OF = N = grid northing
FP = E = grid distance from central meridian
GN = grid north
C = convergence of meridians = angle between true and grid north

Symbols

- lat = latitude of point
- long = longitude of point
- $long_0$ = central meridian of zone

k_0 = scale along $long_0$ = 0.9996. Even though it's a constant, we retain it as a separate symbol to keep the

- numerical coefficients simpler, also to allow for systems that might use a different Mercator projection.
- e = SQRT($1-b^2/a^2$) = .08 approximately. This is the eccentricity of the earth's elliptical cross-section.

$e'^2 = (ea/b)^2 = e^2/(1-e^2)$ = .007 approximately. The quantity e' only occurs in even powers so it need only be

- calculated as e'^2.
- n = (a-b)/(a+b)
- rho = $a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2(lat))^{3/2}$. This is the radius of curvature of the earth in the meridian plane.

nu = $a/(1-e^2\sin^2(lat))^{1/2}$. This is the radius of curvature of the earth perpendicular to the meridian plane. It is also the distance from the point in question to the polar axis, measured perpendicular to the earth's

- surface.
- p = ($long-long_0$) **in radians** (This differs from the treatment in the Army reference)

Calculate the Meridional Arc

S is the meridional arc through the point in question (the distance along the earth's surface from the equator). All angles are in radians.

- S = A'lat - B'sin(2lat) + C'sin(4lat) - D'sin(6lat) + E'sin(8lat), where lat is in radians and
- $A' = a[1 - n + (5/4)(n^2 - n^3) + (81/64)(n^4 - n^5) ...]$
- $B' = (3\tan S/2)[1 - n + (7/8)(n^2 - n^3) + (55/64)(n^4 - n^5) ...]$
- $C' = (15\tan^2 S/16)[1 - n + (3/4)(n^2 - n^3) ...]$
- $D' = (35\tan^3 S/48)[1 - n + (11/16)(n^2 - n^3) ...]$
- $E' = (315\tan^4 S/512)[1 - n ...]$

The USGS gives this form, which may be more appealing to some. (They use M where the Army uses S)

$M = a[(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 ....)lat$
$- (3e^2/8 + 3e^4/32 + 45e^6/1024...)\sin(2lat)$
$+ (15e^4/256 + 45e^6/1024 + ...)\sin(4lat)$

- $- (35e^6/3072 + ...) \sin(6lat) + ...)]$ where lat is in radians

This is the hard part. Calculating the arc length of an ellipse involves functions called *elliptic integrals*, which don't reduce to neat closed formulas. So they have to be represented as series.

Converting Latitude and Longitude to UTM

All angles are in radians.

y = northing = $K1 + K2p^2 + K3p^4$, where

- $K1 = Sk_0$,
- $K2 = k_0$ nu sin(lat)cos(lat)/2 = k_0 nu sin(2 lat)/4
- $K3 = [k_0 \text{ nu} \sin(lat)\cos^3(lat)/24][(5 - \tan^2(lat) + 9e'^2\cos^2(lat) + 4e'^4\cos^4(lat)]$

x = easting = $K4p + K5p^3$, where

- $K4 = k_0$ nu cos(lat)

شكل (٨-١٤) معادلات تحويل الإحداثيات من نظام UTM إلي النظام الجغرافي

(المرجع: http://www.uwgb.edu/dutchs/usefuldata/utmformulas.htm)

Converting UTM to Latitude and Longitude

In response to innumerable e-mails, you *cannot* use UTM grid coordinates without knowing your zone. There are sixty points on the earth's surface that have the same numerical UTM coordinates, 120 if you consider that northing is duplicated in both hemispheres.

y = northing, x = easting (relative to central meridian; subtract 500,000 from conventional UTM coordinate).

Calculate the Meridional Arc

This is easy: $M = y/k_0$.

Calculate Footprint Latitude

- $mu = M/[a(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256...)$
- $e_1 = [1 - (1 - e^2)^{1/2}]/[1 + (1 - e^2)^{1/2}]$

footprint latitude $fp = mu + J1\sin(2mu) + J2\sin(4mu) + J3\sin(6mu) + J4\sin(8mu)$, where:

- $J1 = (3e_1/2 - 27e_1^3/32 ..)$
- $J2 = (21e_1^2/16 - 55e_1^4/32 ..)$
- $J3 = (151e_1^3/96 ..)$
- $J4 = (1097e_1^4/512 ..)$

Calculate Latitude and Longitude

- $e'^2 = (ea/b)^2 = e^2/(1-e^2)$
- $C1 = e'^2\cos^2(fp)$
- $T1 = \tan^2(fp)$
- $R1 = a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2(fp))^{3/2}$. This is the same as rho in the forward conversion formulas above, but calculated for fp instead of lat.
- $N1 = a/(1-e^2\sin^2(fp))^{1/2}$. This is the same as nu in the forward conversion formulas above, but calculated for fp instead of lat.
- $D = x/(N1k_0)$

$lat = fp - Q1(Q2 - Q3 + Q4)$, where:

- $Q1 = N1 \tan(fp)/R1$
- $Q2 = (D^2/2)$
- $Q3 = (5 + 3T1 + 10C1 - 4C1^2 - 9e'^2)D^4/24$
- $Q4 = (61 + 90T1 + 298C1 + 45T1^2 - 3C1^2 - 252e'^2)D^6/720$

$long = long0 + (Q5 - Q6 + Q7)/\cos(fp)$, where:

- $Q5 = D$
- $Q6 = (1 + 2T1 + C1)D^3/6$
- $Q7 = (5 - 2C1 + 28T1 - 3C1^2 + 8e'^2 + 24T1^2)D^5/120$

شكل (٨-١٥) معادلات تحويل الإحداثيات من النظام الجغرافي إلي نظام UTM

(المرجع: http://www.uwgb.edu/dutchs/usefuldata/utmformulas.htm)

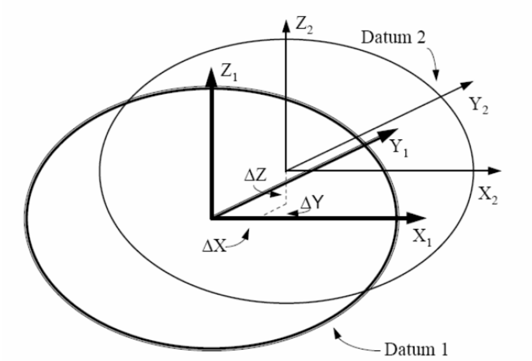
٨-٥ التحويل بين المراجع

إن تحويل الإحداثيات بين المراجع الجيوديسية المختلفة أصبح حلقة مهمة من حلقات العمل الجيوديسي في الآونة الأخيرة. فمع ازدياد التعاون التنموي و المشروعات المشتركة بين الدول المتجاورة ومع اختلاف المرجع الجيوديسي المستخدم في خرائط و قاعدة البيانات الجيوديسية لكل دولة ، أصبح لزاما توحيد الإحداثيات و الخرائط في مناطق الحدود ليمكن تنفيذ هذه المشروعات المدنية (مثل مد خطوط الكهرباء أو أنابيب نقل البترول أو إقامة الطرق). أيضا ومع انتشار تطبيقات التقنيات المساحية الحديثة (مثل الجي بي أس) ازدادت أهمية عملية التحويل بين المراجع. فكمثال: تعطي تقنية الجي بي أس إحداثيات النقاط المرصودة علي المجسم العالمي أو الإليبسويد WGS84 فإذا أردنا توقيع هذه المواقع المرفوعة علي خرائط احدي الدول (التي تعتمد علي اليبسويد آخر أو مرجع جيوديسي محلي) فلا بد من تحويل هذه الإحداثيات من اليبسويد WGS84 إلي هذا الاليبسويد المحلي ، وإلا فأننا سنرتكب أخطاء قد تصل إلي مئات الأمتار عند توقيع هذه الإحداثيات دون تحويلها.

إن عملية التحويل (أي تحويل الإحداثيات) بين المراجع Datum Shift ليست جديدة في العمل الجيوديسي لكنها قد تمت دراستها منذ قرنين أو أكثر ، وقد تم ابتكار العديد من الحلول الرياضية لتنفيذها. وفي العقدين الأخيرين ظهرت طرق رياضية جديدة ربما تكون أكثر دقة من الطرق التقليدية القديمة.

٨-٥-١ الطرق التقليدية للتحويل بين المراجع

لنبدأ بمثال توضيحي بسيط في حالة التحويل بين نظامي إحداثيات مختلفين لكنهما متوازيين (شكل ٨-١٦). لاحظ أننا سنتعامل هنا مع نوع الإحداثيات الجيوديسية الكارتيزية (X,Y,Z) حيث أنها كإحداثيات طولية متعامدة ستكون أسهل من الإحداثيات الجغرافية (ϕ,λ,h).



شكل (٨-١٦) التحويل بين مرجعين متوازيين

حيث أن محاور كلا نظامي الإحداثيات في كلا المرجعين متوازية فأن العلاقة بين المرجعين تتحدد بمعرفة موقع مركز المرجع الأول بالنسبة لموقع مركز المرجع الثاني ، أي تحديد فرق الإحداثيات بين موقع (أو إحداثيات) النقطة علي المرجع الأول وموقعها أو إحداثياتها علي المرجع الثاني. وهذا الفرق يتحدد من خلال ثلاثة مركبات $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ (ينطق الحرف اللاتيني Δ دلتا) والتي تسمي عناصر النقل Translation Parameters:

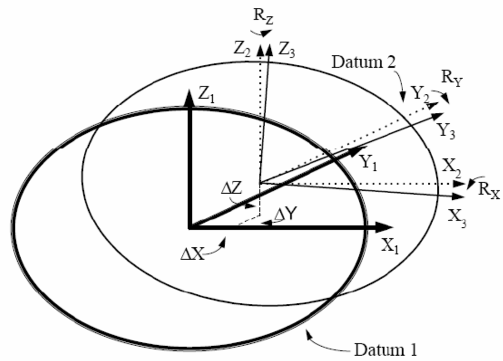
$$\Delta X = X2 - X1$$
$$\Delta Y = Y2 - Y1 \qquad (8\text{-}7)$$
$$\Delta Z = Z2 - Z1$$

فإذا علمنا إحداثيات نقطة واحدة علي المرجع الأول (X1,Y1,Z1) وإحداثياتها علي المرجع الثاني (X2,Y2,Z2) فيمكننا حساب فرق الإحداثيات باستخدام المعادلة السابقة. فإذا كان لدينا نقطة جديدة معلوم إحداثياتها علي المرجع الأول (X,Y,Z) فيمكن تحويلها إلي المرجع الثاني (X',Y',Z') بكل سهولة:

$$X' = X + \Delta X$$
$$Y' = Y + \Delta Y \qquad (8\text{-}8)$$
$$Z' = Z + \Delta Z$$

أي أن كل ما نحتاج إليه في هذه الحالة (الفرض بأن المرجعين متوازيي المحاور) هو معرفة إحداثيات نقطة واحدة علي الأقل في كلا النظامين.

لكن الحالة العامة للعلاقة بين أي مرجعين أو البسويدين أن وضعهما لن يكون متوازي المحاور، بل أن محاور أحدهما ستكون مائلة علي محاور الآخر. كما أن حجم الاليبسويد الأول ليس بالضرورة أن يكون مساويا لحجم الاليبسويد الثاني. وبالتالي فبدلا من وجود ثلاثة عناصر فقط مطلوب تحديدهم (ΔX, ΔY, ΔZ) كما في الحالة البسيطة السابقة فسينتج لدينا ٤ عناصر أخري: ثلاثة لتحديد فروق الميل بين المحاور الثلاثة في كل مرجع وتسمي عناصر الدوران Rotation Parameters ، بالإضافة لعنصر يحدد فرق الحجم بين كلا المرجعين ويسمي معامل القياس scale factor (شكل ٨-١٧).



شكل (٨-١٧) التحويل بين أي مرجعين

وكما نري في هذا الشكل سنجد أن العناصر الجديدة المطلوبة هي:

- زاوية الدوران (أو الفرق) بين محوري X في كلا المرجعين ، ونرمز لها Rx
- زاوية الدوران (أو الفرق) بين محوري Y في كلا المرجعين ، ونرمز لها Ry
- زاوية الدوران (أو الفرق) بين محوري Z في كلا المرجعين ، ونرمز لها Rz
- بالإضافة للعنصر الرابع scale factor الذي يحدد فرق معامل القياس بين كلا المرجعين ونرمز له عادة بالرمز s.

أي أننا لتحديد العلاقة الفراغية (المكانية) بين أي مرجعين في الحالة العامة يلزمنا تحديد ٧ عناصر ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, Rx, Ry, Rz, s$) وهي ما نطلق عليها اسم عناصر التحويل Transformation Parameters بين المراجع الجيوديسية. وفي هذه الحالة لا يمكننا الاعتماد علي توافر نقطة واحدة فقط معلومة (كما في الحالية البسيطة السابقة) لكن يلزمنا وجود ٣ نقاط – علي الأقل – معلوم إحداثياتهم في كلا المرجعين. فإذا كان لدينا معلومات لأكثر من ٣ نقاط زادت دقة الحل المطلوب لتحديد عناصر التحويل السبعة ، كما أن دقة تحديد العناصر تعتمد علي دقة إحداثيات النقاط المعلومة في كلا المرجعين. وهذين السببين وراء وجود أكثر من مجموعة منشورة و معلنة من عناصر التحويل بين مرجعين محددين ، فمعادلات التحويل ثابتة لكن عدد و جودة البيانات المستخدمة في الحساب ستؤدي لقيم متفاوتة لعناصر التحويل بين نفس المرجعين.

توجد عدة نماذج من المعادلات التي تسمح بالتحويل بين المراجع المختلفة و من أشهر هذه النماذج نموذج بورسا-وولف Bursa-Wolf ونموذج مولودينسكس-بادكس Molodenskii-Badekas. وتتمثل معادلات نموذج بورسا-وولف في:

$$\begin{vmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} 1 & Rz & -Ry \\ -Rz & 1 & Rx \\ Ry & -Rx & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X2 \\ Y2 \\ Z2 \end{vmatrix} \qquad (8\text{-}9)$$

حيث X1,Y1,Z1 تمثل إحداثيات النقطة في المرجع الأول ، X2,Y2,Z2 تمثل إحداثيات النقطة في المرجع الثاني ، $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ تمثل عناصر الانتقال بين المرجعين ، Rx, Ry, Rz تمثل زوايا الدوران أو عناصر الدوران بين المرجعين ، ويمثل s معامل القياس بينهما. أما نموذج مولودينسكس-بادكس فيضيف ٣ عناصر أخري (X_o, Y_o, Z_o) تتمثل في إحداثيات نقطة افتراضية يتم عندها دوران المحاور.

كما يمكن أن تتم عملية تحويل المراجع باستخدام الإحداثيات الجغرافية ، والمعادلات التالية تقدم طريقة التحويل من أي مرجع محلي إلي مرجع WGS84 العالمي المستخدم في أرصاد تقنية الجي بي أس:

$$\begin{aligned} \phi_{84} &= \phi_L + \Delta\phi \\ \lambda_{84} &= \lambda_L + \Delta\lambda \\ h_{84} &= h_L + \Delta h \end{aligned} \qquad (8\text{-}10)$$

حيث $\phi_{84}, \lambda_{84}, h_{84}$ تمثل الإحداثيات علي مجسم WGS84 ، ϕ_L, λ_L, h_L تمثل الإحداثيات علي المجسم المحلي.

$$\begin{aligned} \Delta\phi'' = \{ & -\Delta X \sin\phi \cos\lambda - \Delta Y \sin\phi \sin\lambda + \Delta Z \cos\phi + \\ & \Delta a\ (R_N\, e^2 \sin\phi \cos\lambda\ ) / a + \Delta f\ [R_M\ (a/b) + \\ & R_N\ (b/a)\ ] \sin\phi \cos\lambda\ \} / (\ [R_M + h\ ] \sin 1''\ ) \end{aligned} \qquad (8\text{-}11)$$

$$\Delta\lambda'' = [\ -\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda\ ] / [\ \ (R_N + h\ ] \cos\phi \sin 1''\ ] \qquad (8\text{-}12)$$

$$\Delta h = \Delta X \cos\phi \cos\lambda + \Delta Y \cos\phi \sin\lambda + \Delta Z \sin\phi - \Delta a\,(a/R_N) + \Delta f\,(b/a)\,R_N \sin^2\phi \quad (8\text{-}13)$$

حيث:

a, b هما قيم نصف المحور الأكبر و نصف المحور الأصغر للمرجع المحلي ، f تفلطح المرجع المحلي ،
$\Delta a, \Delta f$ هما الفرق بين نصف المحور الأكبر و التفلطح لمرجع WGS84 ناقص القيم المماثلة للمرجع المحلي ،

$$f - ١ = a / b \quad (8\text{-}14)$$

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (8\text{-}15)$$

$$R_N = a / (1 - e^2 \sin^2\phi)^{1/2} \quad (8\text{-}16)$$

$$R_M = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2\phi)^{3/2} \quad (8\text{-}17)$$

توجد العديد من قيم عناصر التحويل المعلنة أو المنشورة وخاصة مع انتشار تطبيقات تقنية الجي بي أس التي تعتمد إحداثياتها علي المجسم العالمي WGS84. يقدم جدول (٨-٢) قيم عناصر التحويل من بعض المراجع الوطنية في الدول العربية إلي مرجع WGS84:

جدول (٨-٢) عناصر التحويل بين المرجع الجيوديسي العالمي WGS84 والمراجع الجيوديسية المحلية

الدولة	المرجع الوطني	الاليبسويد	عدد النقاط المستخدمة	عناصر التحويل (بالمتر)		
				D X	D Y	D Z
السودان	Adindan	Clark 1880	٢٢	١٦٦- (٥)	١٥- (٥)	٢٠٤ (٣)
تونس	Carthage	Clark 1880	٥	٢٦٣- (٦)	٦ (٩)	٤٣١ (٨)
	European 1950	International 1924	٤	١١٢- (٢٥)	٧٧- (٢٥)	١٤٥- (٢٥)
المغرب	Merchich	Clark 1880	٩	٣١ (٥)	١٤٦ (٣)	٤٧ (٣)
الجزائر	North Sahara 1959	Clark 1880	٣	١٨٦- (٢٥)	٩٣- (٢٥)	٣١٠ (٢٥)
	Voirol 1960	Clark 1880	٢	١٢٣- (٢٥)	٢٠٦- (٢٥)	٢١٩ (٢٥)
مصر	Old Egyptian 1906	Helmert 1906	١٤	١٣٠- (٣)	١١٠ (٦)	١٣- (٨)
البحرين	Ain El Abd 1970	International 1924	٢	١٥٠- (٢٥)	٢٥٠- (٢٥)	١- (٢٥)
السعودية	Ain El Abd 1970	International 1924	٩	١٤٣- (١٠)	٢٣٦- (١٠)	٧ (١٠)
الإمارات	Nahrwan	Clark 1880	٢	٢٤٩- (٢٥)	١٥٦- (٢٥)	٣٨١ (٢٥)
عمان	Nahrwan	Clark 1880	٢	٢٤٧- (٢٥)	١٤٨- (٢٥)	٣٦٩ (٢٥)
	Oman	Clark 1880	٧	٣٤٦- (٣)	١- (٣)	٢٢٤ (٩)
قطر	Qatar National	International 1924	٣	١٢٨- (٢٠)	٢٨٣- (٢٠)	٢٢ (٢٠)
العراق والكويت و الأردن و ولبنان و سوريا	European 1950	International 1924	؟	١٠٣-	١٠٦-	١٤١-
تونس و الجزائر	Voirol 1874	Clark 1880	؟	٧٣-	٢٤٧-	٢٢٧

لكن يجب مراعاة الملاحظات التالية علي قيم هذا الجدول:

١. قيم العناصر المذكورة هي للتحويل من المرجع المحلي إلي مرجع WGS84 وللتحويل من WGS84 إلي المرجع المحلي يجب عكس جميع الإشارات الجبرية (موجب بدلا من سالب و العكس).
٢. القيم المذكورة لثلاثة عناصر فقط (وليس سبعة) وبالتالي فهي أقل دقة.
٣. الجدول يوضح أيضا عدد نقاط الثوابت المساحية التي تم استخدامها في حساب هذه العناصر لكل مرجع محلي.
٤. العدد المذكور بين القوسين هو مؤشر للدقة المتوقعة لقيمة كل عنصر من عناصر التحويل.
٥. القيم في آخر سطرين من الجدول تم حسابها بطرق أخري بخلاف رصد نقاط ثوابت مساحية وبالتالي فأن قيم الدقة المتوقعة غير متاحة.

٨-٥-٢ الطرق غير التقليدية للتحويل بين المراجع

عابت الطرق التقليدية للتحويل بين المراجع الجيوديسية عدة نقاط تقلل من دقة عناصر التحويل التي يتم حسابها باستخدام هذه الطرق. أهم هذه العيوب أن نظريات تطوير هذه النماذج الرياضية تعتمد علي فرضية أن إحداثيات النقاط المعلومة في كلا المرجعين – المطلوب التحويل بينهما – هي إحداثيات دقيقة تماما و خاليا من أي مصدر من مصادر الأخطاء Error-Free. لكن هذا الوضع غير صحيح تماما ، فمن المعروف أن معظم الشبكات الجيوديسية المحلية بها عيوب عديدة من وجهة النظر التقنية نظرا لان معظم هذه الشبكات قد تم إقامتها في النصف الأول من القرن العشرين أو قبل ذلك حيث لم تكن الأجهزة المساحية بلغت مرحلة عالية من الدقة قبل بدء ثورة الملاحة بالأقمار الصناعية. كما أن عدم وجود حاسبات آلية متطورة في ذلك الوقت أدي لإتمام العمليات الحسابية و ضبط الشبكات بطريقة غير دقيقة بنسبة كبيرة. ذلك بالإضافة إلي أن دقة الشبكات الجيوديسية في أي مرجع وطني تختلف من منطقة جغرافية لأخري (حيث لم يمكن تغطية دولة كاملة بشبكات جيوديسية إلا مع مرور بضعة سنوات) وهذا أيضا يعد العامل الثالث الذي لا تأخذه الطرق التقليدية في الاعتبار. وإذا أخذنا مصر كمثال فسنجد أن دقة الإحداثيات الجيوديسية لشبكات المثلثات الوطنية ذات الدرجة الأولي كانت أكبر من ٠.٥ متر ، وهذه دقة متواضعة عند مقارنتها بدقة الإحداثيات الناتجة الآن من استخدام تقنية الجي بي أس والتي قد تصل إلي سنتيمترات وأحيانا ملليمترات. وبالتالي فأن استخدام الطرق التقليدية لحساب عناصر التحويل بين مرجع WGS84 – علي سبيل المثال - وأي مرجع محلي سيؤدي للحصول علي دقة ديسيمترات عند حساب عناصر التحويل بين هذين المرجعين. ومن هنا بدأ منذ سنوات البحث عن طرق جديدة غير تقليدية لتحويل الإحداثيات بين المراجع الجيوديسية ، أو البحث عن وسائل جديدة تتيح زيادة دقة النماذج الرياضية التقليدية. وهناك العشرات من الطرق والوسائل التي تم تطويرها في هذا المجال و سنستعرض هنا البعض منهم.

أولي هذه الطرق غير التقليدية هو تمثيل الفروق بين الإحداثيات علي المرجعين فراغيا spatial representation في صورة نموذج رياضي يغطي منطقة جغرافية معينة. وأهم ما يميز هذا الأسلوب أنه يستخدم الإحداثيات علي كلا المرجعين (للنقاط المشتركة) كما هي وبالتالي فأن قيمة الفروق ستتغير من مكان جغرافي لآخر داخل المنطقة المطلوبة ولن تكون العلاقة الرياضية بين كلا المرجعين علاقة ثابتة علي امتداد هذه المنطقة كما كان الحال في الطرق التقليدية. وطبقت وزارة الدفاع الأمريكية هذا المبدأ في استنباط ما يسمي سطوح التحويل conversion surfaces بين مرجع WGS84 والمراجع الجيوديسية الوطنية

لمعظم دول العالم. وتختلف طرق تمثيل الفروق باختلاف النماذج الرياضية المستخدمة ، وتعد طريقة ذات الحدود polynomial أكثر النماذج تطبيقا ، مع اختلاف عدد المعاملات في المتوالية الرياضية والتي تعتمد علي كم النقاط المشتركة المتاحة وذلك بتطبيق مبدأ الانحدار المتعدد Multiple Regression. تم تطبيق هذا الأسلوب في مصر لاستنباط معادلات رياضية وسطح تحويل بين مرجعي WGS84 و هلمرت ١٩٠٦ وكانت النتائج كالتالي:

$$\Delta\phi'' = -320.474 + 30.6751\,\phi_{84} + 3.0402\,\lambda_{84} - 1.7380\,\phi^2_{84} + 0.0436\,\phi^3_{84} - 0.0004\,\phi^4_{84} - 0.1056\,\lambda^2_{84} + 0.0012\,\lambda^3_{84} \tag{8-18}$$

$$\Delta\lambda'' = 4357.7294 - 734.6377\,\lambda_{84} + 49.4639\,\lambda^2_{84} - 0.1705\,\phi_{84} - 1.6600\lambda^3_{84} + 0.0278\,\lambda^4_{84} + 0.0037\,\phi^2_{84} - 0.0002\,\lambda^5_{84} \tag{8-19}$$

حيث $\Delta\phi$ و $\Delta\lambda$ هما الفرق بالثواني في دوائر العرض و خطوط الطول – بالترتيب – بين المرجعين ، و ϕ_{84} , λ_{84} هما الإحداثيات الجغرافية علي مجسم WGS84.

ومن ثم يمكن تحويل الإحداثيات الجغرافية إلي المرجع المحلي المصري هلمرت ١٩٠٦ من خلال:

$$\phi_{OED} = \phi_{84} + \Delta\phi \tag{8-20}$$

$$\lambda_{OED} = \lambda_{84} + \Delta\lambda \tag{8-21}$$

حيث ϕ_{OED} , λ_{OED} هما الإحداثيات الجغرافية علي مجسم هلمرت ١٩٠٦. هذا وقد أثبتت نتائج اختبار هذا الأسلوب علي نقاط تحكم check points جيوديسية في مصر أن دقة الأسلوب الجديد (عند حساب الإحداثيات الوطنية المحلية) تقدر بحوالي ٠.٥ متر مقارنة بدقة حوالي ٣.٠ متر للطريقة التقليدية. كما تم تقديم مقترح باستخدام هذا الأسلوب غير التقليدي و تطبيقه في سوريا.

طريقة أخري من الطرق غير التقليدية في التحويل بين المراجع تعتمد علي استخدام أوزان مختلفة Different Weights لإحداثيات النقاط المشتركة المستخدمة في تقدير عناصر التحويل بين المرجعين. المبدأ الأساسي وراء هذا الأسلوب هو أن دقة إحداثيات النقاط المشتركة ستختلف من نقطة لآخري وبالتالي يجب تحديد وزن محدد يتناسب مع دقة كل نقطة وذلك أثناء تطبيق أي نموذج من النماذج التقليدية (مثل نموذج بورسا - وولف) ، أي أن هذا الأسلوب هو تعديل للطريقة التقليدية بهدف زيادة جودتها في وصف العلاقة الرياضية بين مرجعين جيوديسين. كما تم أيضا تطبيق طريقة العنصر المحدد Finite Element كأحد الطرق غير التقليدية في التحويل بين المراجع الجيوديسية.

٨-٥-٣ التحويل بين المراجع ثلاثية و رباعية الأبعاد

في معظم التطبيقات المساحية و الخرائطية باستخدام تقنية الجي بي أس فأننا نحصل علي إحداثيات ثلاثية الأبعاد 3D علي الاليبسويد العالمي WGS84 الذي يمثل شكل و حجم الأرض. لكن في التطبيقات الجيوديسية عالية الدقة (مثل مراقبة تحركات القشرة الأرضية ومراقبة هبوط المنشئات الضخمة) لا نكتفي بالتعامل مع الإحداثيات ثلاثية الأبعاد كقيم ثابتة لكن نحتاج لإطار مرجعي رباعي الأبعاد (متغير مع الزمن) لتنسب له هذه الإحداثيات. وأفضل مرجع رباعي الأبعاد هو الإطار المرجعي الأرضي العالمي ITRF كما تناولنا سابقا. وتجدر الإشارة لوجود عدة تعريفات لاليبسويد WGS84 إلا أن آخر تعديل له هو المسمي G730 هو المستخدم في استنباط إحداثيات الجي بي أس ، وهذا التعديل متوافق مع إطار ITRF92 في حدود ١٠ سم. أما لتحويل الإحداثيات من اليبسويد WGS84(G730) إلي ITRF بتعريفاته الأحدث نستخدم المعادلات التالية:

$$\begin{vmatrix} XS \\ YS \\ ZS \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & -R3 & R2 \\ R3 & D & -R1 \\ -R2 & R1 & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \qquad (8\text{-}22)$$

حيث X, Y, Z تمثل الإحداثيات علي إطار ITRF2000 و XS, YS, ZS تمثل الإحداثيات علي WGS84.

ولحساب قيمة أي عنصر P عند الزمن t فأننا نستخدم المعادلة:

$$P(t) = P(EPOCH) + P' (t - EPOCH) \qquad (8\text{-}23)$$

حيث EPOCH هي سنة تعريف إطار ITRF المطلوب ، 'P تمثل معدل تغير هذا العنصر.

أولا: التحويل من ITRF2000 إلي ITRF92:

T1 = 1.47 cm, rate = 0.00 cm/year
T2 = 1.35 cm, rate = - 0.06 cm/year
T3 = -1.39 cm, rate = - 0.14 cm/year
D = 0.75 ppb, rate = 0.01 ppb/year (ppb = part per billion)
R1 = 0.00 " , rate = 0.00 "/year
R2 = 0.00 " , rate = 0.00 "/year
R3 = - 0.0018 " , rate = 0.0002 "/year
EPOCH = 1988.0

ثانيا: التحويل من ITRF2005 إلي ITRF2000:

T1 = 0.1 mm, rate = -0.2 mm/year
T2 = -0.8 mm, rate = 0.1 mm/year
T3 = -5.8 mm, rate = - 1.8 mm/year
D = 0.4 ppb, rate = 0.08 ppb/year (ppb = part per billion)

R1 = 0.000 " , rate = 0.000 "/year
R2 = 0.000 " , rate = 0.000 "/year
R3 = 0.000 " , rate = 0.000 "/year
EPOCH = 2000.0

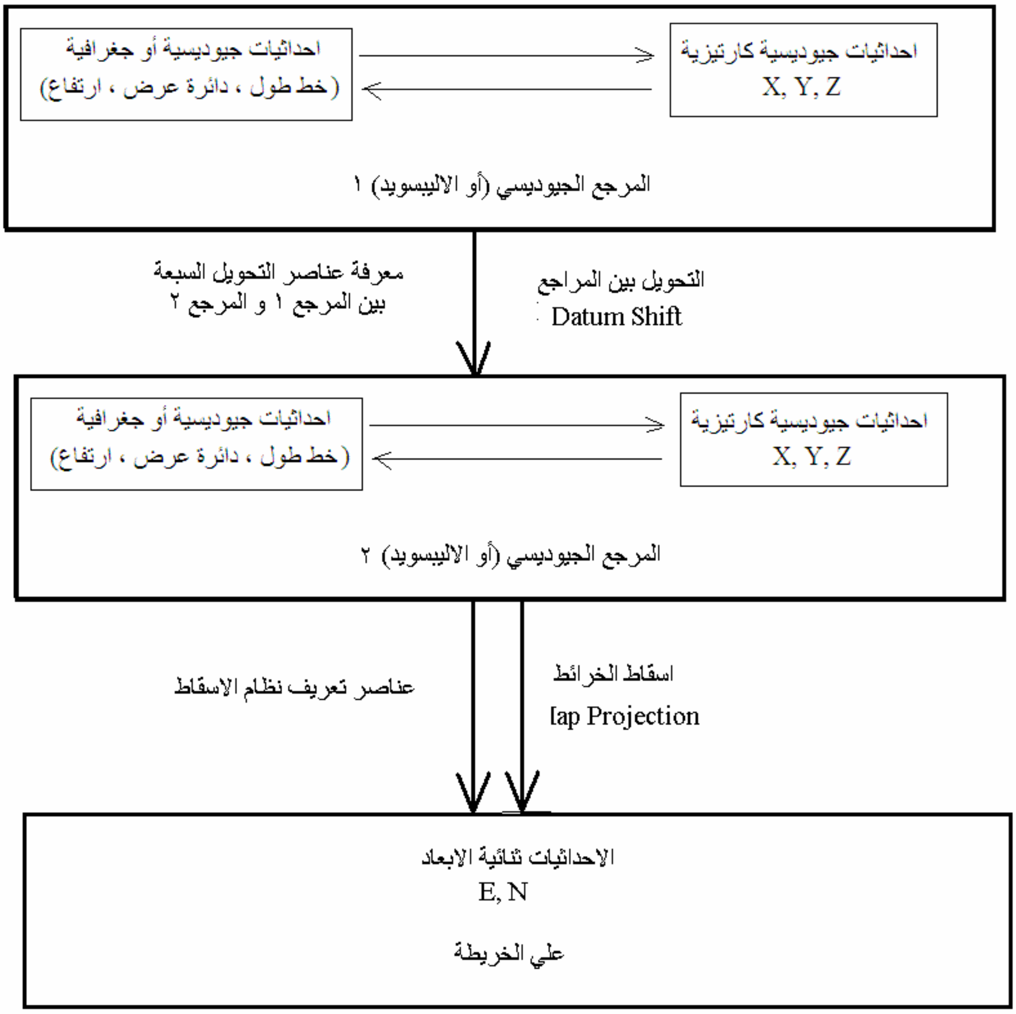
كما توجد قيم منشورة لعناصر التحويل بين كل تعريفات ITRF في السنوات الأخيرة.

٨-٦ العلاقة بين تحويل المراجع و إسقاط الخرائط

قد يساور البعض لبسا كبيرا في خطوات تحويل الإحداثيات التي تقيسها علي الطبيعة إلي تلك الموقعة علي الخريطة ، وعلي الجانب الآخر فقد يظن البعض أن أجهزة تقنيات تحديد المواقع (مثل الجي بي أس) ليس بها أي خطأ وأن ما تنتجه من إحداثيات دقيق تماما ! ومن هنا سنحاول أن نلخص – في خطوات مختصرة – ما قمنا بعرضه من أفكار في هذا الفصل (شكل ٨-١٨).

- تتيح لنا تقنيات جيوديسيا الأقمار الصناعية تحديد المواقع علي سطح الأرض ، لكن بالاعتماد علي نموذج رياضي معين يمثل الأرض شكلا و حجما وهو الذي نطلق عليه اسم الاليبسويد.
- كل نوع من الإحداثيات المرصودة يكون منسوبا لاليبسويد محدد ، فمثلا إحداثيات تقنية الجي بي أس تكون منسوبة للمجسم العالمي أو اليبسويد WGS84.
- سواء كانت الإحداثيات من النوع الجغرافي أو الجيوديسي (خط الطول ϕ ودائرة العرض λ و الارتفاع الجيوديسي h) أو الإحداثيات الكارتيزية (X, Y, Z) فيمكن تحويل أي نوع للآخر (المعادلات ٨-٢ و ٨-٥) لكننا مازلنا علي نفس الاليبسويد.
- لكل دولة اليبسويد معتمد قد تم تعديله ليناسبها (أصبح أسمه مرجع وليس اليبسويد) يختلف من دولة لآخري ، وهو المرجع الذي تستخدمه الدولة في إنتاج خرائطها.
- لا يمكن توقيع الإحداثيات المنسوبة لاليبسويد عالمي (مثل إحداثيات الجي بي أس المنسوبة إلي WGS84) مباشرة علي خرائط أي دولة وإلا فأننا نتوقع خطأ في التوقيع قد يصل إلي مئات الأمتار.
- يتم تحويل الإحداثيات من اليبسويد عالمي (مثل WGS84) إلي أي مرجع وطني أو محلي لدولة معينة من خلال معرفة عناصر التحويل السبعة ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, Rx, Ry, Rz, s$) التي تصف العلاقة الرياضية بين كلا المرجعين ، باستخدام المعادلة ٨-٨ مثلا.
- تختلف دقة حساب الإحداثيات علي المرجع المحلي باختلاف دقة عناصر التحويل المستخدمة ، وللأعمال المساحية البسيطة يمكن استخدام قيم عناصر التحويل الموجودة في جدول ٢-٢ ، إلا أنه يجب ملاحظة أنها قيم غير دقيقة تماما و لا تناسب المشروعات الجيوديسية التي تتطلب دقة عالية حيث يجب البحث عن عناصر تحويل أكثر دقة.
- أما لتوقيع الإحداثيات الجيوديسية ثلاثية الأبعاد إلي إحداثيات ثنائية الأبعاد (الإحداثيات علي الخريطة) فسنستخدم أحدي طرق إسقاط الخرائط ، حيث يجب معرفة معاملات الإسقاط (مثلا ٥ معاملات لإسقاط ميريكاتور المستعرض: الاحداثي الشرقي الزائف ، الاحداثي الشمالي الزائف ، خط الطول المركزي ، دائرة العرض القياسية ، معامل القياس) لكل طريقة. وحيث أن المرجع الجيوديسي و نظام إسقاط الخرائط يختلف من دولة لأخرى فأن معاملات الإسقاط أيضا ستختلف من خرائط دولة لأخرى.

- أي أننا في النهاية وللوصول إلي الإحداثيات علي الخريطة نحتاج لمعرفة ١٢ عنصر (وأحيانا أكثر أو أقل): ٧ عناصر تحويل الإحداثيات بين المراجع ، ٥ عناصر (أو أكثر) لتعريف نظام الإسقاط.
- أخيرا يجب ملاحظة أن الارتفاع المقاس بتقنية الجي بي أس يكون منسوبا لسطح الاليبسويد العالمي WGS84 بينما الارتفاع المستخدم في الخرائط المساحية يكون منسوبا لمستوي متوسط سطح البحر MSL والفرق بينهما يسمي حيود الجيويد ، أي أنه يجب وجود نموذج جيويد Geoid Model لكي نحول ارتفاعات الجي بي أس إلي مناسيب تستخدم في الخرائط الطبوغرافية و التفصيلية وكافة المشروعات الهندسية المدنية (سنتحدث عن الجيويد لاحقا).



شكل (٨-١٨) خطوات تحويل و إسقاط الإحداثيات

الفصل التاسع

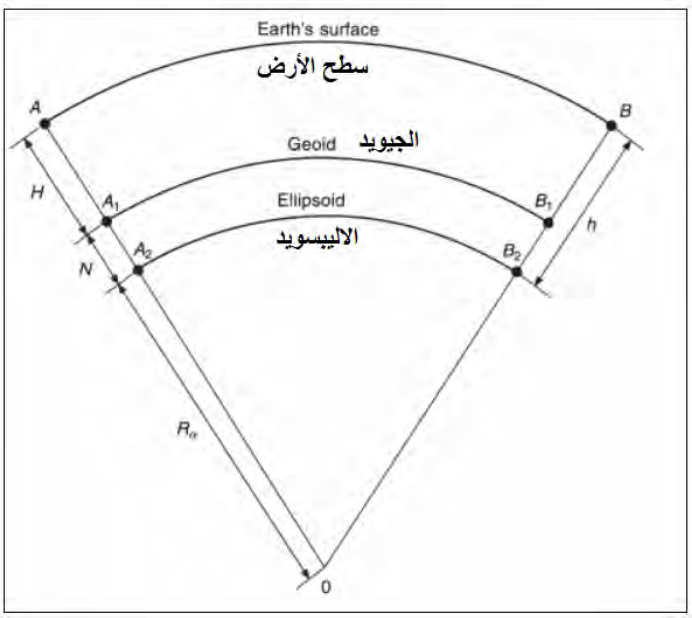
إسقاط الأرصاد

٩-١ مقدمة

تتطلب الشبكات الجيوديسية (شبكات الثوابت الأرضية) عمل قياسات جيوديسية لخطوط طويلة ويتم قياس المسافات المائلة slope distance علي سطح الأرض وذلك باستخدام أجهزة قياس المسافات الكترونيا مثل EDM أو المحطة الشاملة. لكن - وكما سبق القول - فأن الخرائط تعتمد علي سطح الاليبسويد كأقرب الأشكال الهندسية للشكل الحقيقي للأرض. ومن ثم فأن القياسات الجيوديسية تتطلب نوعا من التصحيح لكي يتم إسقاطها من سطح الأرض حيث تمت القياسات إلي سطح الاليبسويد، وهذا ما يعرف بالإسقاط الهندسي geometric reduction. وهذا النوع من الحسابات غير مؤثر للقياسات المساحية التي تتم في منطقة صغيرة (مثلا المسافات الأقل من ١٠ كيلومترات) حيث أن قيمته ستكون صغيرة (١ ملليمتر) ويمكن إهمالها.

٩-٢ إسقاط المسافات

يتم إسقاط المسافة المقاسة علي سطح الأرض A B إلي المسافة A_1 B_1 علي سطح الجيويد ثم إلي المسافة A_2 B_2 علي سطح الاليبسويد كالتالي:



شكل (٩-١) إسقاط المسافات

المسافة R_a تمثل نصف قطر الاليبسويد في الاتجاه من A إلي B ويتم حسابها كالتالي:

$$R_a = pv/(p\sin^2\alpha + v\cos^2\alpha) \quad (9\text{-}1)$$

$$p = a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2} \quad (9\text{-}2)$$

$$v = a/(1-e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \qquad (9\text{-}3)$$

حيث:

p نصف قطر التكور في اتجاه دوائر العرض meridional radius of curvature
v نصف قطر التكور في الاتجاه العمودي علي خطوط الطول prime vertical radius of curvature
α انحراف الخط A B
ϕ دائرة عرض النقطة A
e المركزية الأولي للاليبسويد first eccentricity ويتم حسابها بالمعادلة:

$$e = (\sqrt{a^2 - b^2})/a \qquad (9\text{-}4)$$

حيث:

a, b نصف المحور الأكبر و نصف المحور الأصغر للاليبسويد علي الترتيب.

أما المسافة المسقطة علي سطح الاليبسويد فيتم حسابها بالمعادلة:

$$A_2B_2 = L - LH/(R_a + H + N) \qquad (9\text{-}5)$$

حيث:

L المسافة الأفقية (وليست المسافة المائلة المقاسة) AB علي سطح الأرض (أرجع للمعادلة ١-٤٤).
H المنسوب المتوسط mean height فوق مستوي سطح البحر MSL
N حيود الجيويد أو ارتفاع الجيويد عن سطح الاليبسويد

٩-٣ إسقاط الاتجاهات و الزوايا الأفقية

حيث أن الاتجاهات المقاسة (بأجهزة الثيودليت أو المحطة الشاملة) تعتمد علي الاتجاه العمودي علي سطح الجيويد عند نقطة القياس، وهو اتجاه يختلف عن الاتجاه العمودي علي سطح الاليبسويد ، فأن هذه الاتجاهات تتطلب تصحيحا بالنسبة للاتجاه العمودي correction for the deflection of the vertical ويتم حسابه كالتالي:

$$C''_{def} = Az - \alpha = -\eta \tan\phi - (\xi \sin Az - \eta \cos Az)\cot z \qquad (9\text{-}6)$$

حيث:

C''_{def} تصحيح الاتجاه بالثواني

Az	الانحراف الفلكي للخط
α	الانحراف الجيوديسي للخط
η و ξ	مركبتي زاوية الانحراف بين العمودي علي الجيويد و العمودي علي الاليبسويد

ومن ثم يمكن حساب الانحراف الجيوديسي للخط بإضافة قيمة التصحيح إلي الانحراف الفلكي المقاس للخط:

$$\alpha = C''_{def} + Az \tag{9-7}$$

وبتصحيح الاتجاهين اللذين يحصران الزاوية الأفقية بينهما فأن الزاوية المصححة يمكن الحصول عليها.

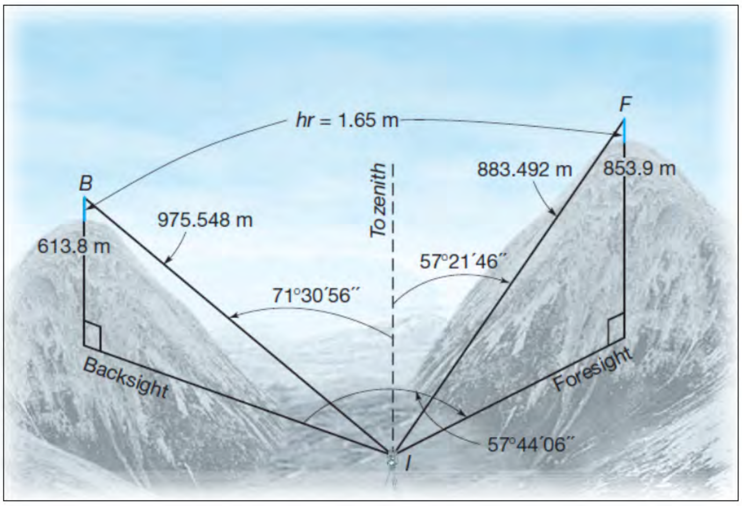
وللدلالة علي أهمية هذا التصحيح في الشبكات الجيوديسية فلنأخذ مثالا بافتراض أن قيم كلا من مركبتي زاوية الانحراف بين العمودي علي الجيويد و العمودي علي الاليبسويد η و ξ تبلغ ٢١". فإذا قمنا بحساب فرق الزاوية الأفقية من المعادلة السابقة (مع تغير الانحراف و تغير الزاوية الرأسية) فسنجد النتائج كما في الجدول التالي:

الانحراف	الزاوية الرأسية				
	٠°	١°	٢°	٣°	٥°
٠°	٠.٠٠"	٠.٣٧"	٠.٧٣"	١.١٠"	١.٨٤"
٣٠°	٠.٠٠"	٠.١٣"	٠.٢٧"	٠.٤٠"	٠.٦٧"
٤٥°	٠.٠٠"	٠.٠٠"	٠.٠٠"	٠.٠٠"	٠.٠٠"
٦٠°	٠.٠٠"	- ٠.١٣"	- ٠.٢٧"	- ٠.٤٠"	- ٠.٦٧"
٩٠°	٠.٠٠"	- ٠.٣٧"	- ٠.٧٣"	- ١.١٠"	- ١.٨٤"
١٢٠°	٠.٠٠"	- ٠.٥٠"	- ١.٠٠"	- ١.٥٠"	- ٢.٥١"
١٣٥°	٠.٠٠"	- ٠.٥٠"	- ١.٠٤"	- ١.٥٦"	- ٢.٦٠"

وهذا يدل علي أن التصحيح قد يصل إلي أكثر من ثانيتين للزوايا المرصودة خاصة في المناطق الجبلية، ومن ثم فهذا يعني أنه تصحيحا مؤثرا و يجب تطبيقه للشبكات الجيوديسية الدقيقة.

<u>مثال:</u>

في الشكل التالي تم قياس الزاوية الأفقية BIF ووجدت تساوي ٠٦" ٤٤' ٥٧° عند النقطة I التي دائرة عرضها تبلغ ٢٤.٦٧" ١٣' ٤١° وبلغ منسوب نقطة B ٦١٣.٨ متر و منسوب نقطة F ٨٥٣.٩ متر. ووجد أن مركبتي زاوية الانحراف بين الجيويد و الاليبسويد η تساوي ٤.٨٢" و ξ تساوي ٠.٢٩" بينما بلغ حيود الجيويد -٢٩.٤٥ متر عند نقطة B و -٢٩.٨٤ متر عند نقطة F، وبلغ ارتفاع العاكس عند كلا نقطتي الرصد ١.٦٥ متر، وكان الانحراف المقاس إلي B يساوي ٢٤" ١٦' ٢٣° وبلغت المسافة الجيوديسية IB ٩٧٥.٥٤٨ متر والمسافة IF ٨٨٣.٤٩ متر وزاوية السمت zenith عند B ٥٦" ٣٠' ٧١° وعند F ٤٦" ٢١' ٥٧°، أحسب الزاوية الجيوديسية المصححة BIF ؟



شكل (٩-٢) مثال لإسقاط الزوايا الأفقية

نحسب الارتفاع الجيوديسي عند كلا محطتي الرصد:

$$h = H - N + h_r$$

حيث:

h الارتفاع الجيوديسي للعاكس

H منسوب العاكس

h_r ارتفاع العاكس

h_B = 613.8 - 29.45 + 1.65 = 586.00 m

h_F = 853.9 - 29.84 + 1.65 = 825.71 m

نحسب تصحيح الاتجاه الأول بالمعادلة ٩-٦:

$$C''_{def} = -\eta \tan\phi - (\xi \sin Az - \eta \cos Az)\cot z$$

$$C''_{def} = -4.82''\tan 41^0 13'24.67'' - (0.29''\sin 23^o 16'24'' - 4.82''\cos 23^o 16'24'')\cot 71^0 30'56'')$$

$$= -2.78''$$

نحسب الانحراف عند نقطة F :

Az_F = 23^0 16' 24" + 57^0 44' 06" = 81^0 00' 30"

الآن نحسب تصحيح الاتجاه الثاني بنفس الطريقة:

$$C''_{def} = -\eta \tan\phi - (\xi \sin Az - \eta \cos Az)\cot z$$

$$C''_{def} = -4.82'' \tan 41^0 13'24.67'' - (0.29'' \sin 81^o 00'30'' - 4.82'' \cos 81^o 00'30'')\cot 57^0 21'46'')$$

$$= -3.92''$$

ومن ثم نحسب الانحرافات المصححة (المعادلة ٩-٧) كالتالي:

الانحراف الأول = ٢٤" ١٦' ٢٣° - ٢.٧٨" = ٢١.٢٢" ١٦' ٢٣°

الانحراف الثاني = ٣٠" ٠٠' ٨١° - ٣.٩٢" = ٢٦.٠٨" ٠٠' ٨١°

ومن هنا يتم حساب الزاوية الأفقية المصححة كفرق بين الانحرافين المصححين:

الزاوية الأفقية المصححة = ٢٦.٠٨" ٠٠' ٨١° - ٢١.٢٢" ١٦' ٢٣° = ٠٤.٨٦" ٤٤' ٥٧°

٩-٤ إسقاط الزوايا الرأسية

للشبكات الجيوديسية الدقيقة فأن الزوايا الرأسية المقاسة (بأجهزة الثيودليت أو المحطة الشاملة) تتطلب أيضا تصحيحا بالنسبة للاتجاه العمودي correction for the deflection of the vertical ويتم حسابه كالتالي:

$$Z_C = Z_{obs} + \xi \cos Az - \eta \sin Az \qquad (9\text{-}8)$$

حيث:

Z_C زاوية السمت المصححة
Z_{obs} زاوية السمت المرصودة

وللدلالة علي أهمية هذا التصحيح في الشبكات الجيوديسية فلنأخذ مثالا بافتراض أن قيم كلا من مركبتي زاوية الانحراف بين العمودي علي الجيويد و العمودي علي الاليبسويد η و ξ تبلغ ١٠". فإذا قمنا بحساب فرق الزاوية الرأسية من المعادلة السابقة فسنجد أنها تساوي ١٠" عند انحراف ٠° وأيضا عند انحراف ٩٠°، و تساوي ١٣.٦٦" عند انحراف ٣٠° وأيضا عند انحراف ٦٠°، و تساوي (أكبر قيمها) ١٤.١٤" عند انحراف ٤٥°.

الفصل العاشر

سريان الأخطاء

١٠-١ مقدمة

كما سبق القول (أنظر الجزء ٢-٤) فأن الأرصاد المساحية إما أن تكون أرصاد مباشرة (كميات مستقلة) أو أرصاد غير مباشرة (كميات تابعة). وفي حالة الأرصاد غير المباشرة فيتم حساب (وليس قياس) القيم المطلوبة بواسطة معادلات رياضية تعتمد علي القيم المقاسة. وحيث أن القيم المقاسة سيكون بها قدر من الخطأ فأنه سينتقل بصورة أو بآخري إلي القيم المحسوبة ومن ثم يؤثر علي دفتها، وهذا ما يسمي بسريان الأخطاء error propagation.

١٠-٢ المعادلة العامة لسريان الأخطاء

إذا كان لدينا عدد من الكميات المقاسة المستقلة (independent observations): مثل a, b, c, ...n وتم قياس كلا منهم بأخطاء تبلغ $E_a, E_b, E_c, ...E_n$ وكانت القيمة Z قيمة محسوبة من هذه الأرصاد بدالة رياضية عامة:

$$Z = f (a, b, c, ... n) \qquad (10\text{-}1)$$

فأن الخطأ في القيمة المحسوبة يساوي:

$$E_Z = \pm\sqrt{(\partial f/\partial a)E_a)^2 + (\partial f/\partial b)E_b)^2 + (\partial f/\partial c)E_c)^2 + ... + (\partial f/\partial n)E_n)^2} \qquad (10\text{-}2)$$

حيث:

$\delta f/\delta a$ هو تفاضل الدالة f بالنسبة للمتغير a ،
$\delta f/\delta b$ هو تفاضل الدالة f بالنسبة للمتغير b ، .... وهكذا.

١٠-٣ سريان الأخطاء للمعادلات الخطية

١٠-٣-١ سريان الأخطاء في حساب المجموع

في حالة حساب القيمة Z كمجموع لعدة قياسات ..... ,a, b, c :

$$Z = a + b + c + ...$$

فأن التفاضل $\delta Z/\delta a$ سيساوي ١، وبالمثل سيكون تفاضل الدالة Z لجميع العناصر الأخرى، ومن ثم فأن المعادلة ١٠-٢ ستصبح:

$$E_{sum} = \pm\sqrt{E_a^2 + E_b^2 + E_c^2 + ...} \qquad (10\text{-}3)$$

مثال:

تم قياس خط علي ثلاثة أجزاء فكانت القيم كالتالي: ٧٥٣.٨١±٠.٠١٢ و ١٢٣٨.٤٠±٠.٠٢٨ و ١٠٦٢.٩٥±٠.٠٢٠ متر، أحسب طول الخط الإجمالي والانحراف المعياري المتوقع له؟

طول الخط = ٧٥٣.٨١ + ١٢٣٨.٤٠ + ١٠٦٢.٩٥ = ٣٠٥٥.١٦ متر

وبتطبيق المعادلة ١٠-٣ فأن الانحراف المعياري لطول الخط:

$$E_{sum} = \pm\sqrt{0.012^2 + 0.028^2 + 0.020^2} = \pm 0.036$$

١٠-٣-٢ سريان الأخطاء في مجموعة قياسات

في حالة قياس مجموعة من الأرصاد (زاويا أو مسافات مثلا) بعدد وليكن n وكانت قيمة الخطأ المتوقع في كل قياس من المجموعة متساويا، وليكن E ، فأن الخطأ المتوقع في مجموع هذه الأرصاد يساوي:

$$E_{seies} = \pm\sqrt{E^2 + E^2 + E^2 + ...} = \pm\sqrt{nE^2} = \pm E\sqrt{n} \qquad (10\text{-}4)$$

مثال ١:

إذا تم استخدام شريط لقياس مسافة بطول ١٠٠ متر فأن الخطأ المتوقع سيكون ± ٠.٠٢ متر، أحسب كم سيكون الخطأ المتوقع عند استخدام هذا الشريط لقياس مسافة تبلغ ٥٠٠٠ متر؟

عدد مرات القياس n = ٥٠٠٠ / ١٠٠ = ٥٠

$$E_{seies} = \pm E\sqrt{n} = \pm 0.02\sqrt{50} = \pm 0.14m$$

مثال ٢:

إذا كان المطلوب قياس مسافة تبلغ ١٠٠٠ متر بخطأ لا يزيد عن ± ٠.١٠ متر، فكم سيكون الخطأ في قياس كل ١٠٠ متر للحصول علي هذه الدقة المطلوبة؟

سنغير قليلا في المعادلة ١٠-٤ لتنتج لنا المعادلة:

$$E = E_{seies} / \sqrt{n} \qquad (10\text{-}5)$$

وحيث أن عدد مرات القياس n = ١٠٠٠/١٠٠ = ١٠
فأن دقة القياس للمسافة ١٠٠ متر تساوي:

$$E = E_{seies} / \sqrt{n} = 0.10 / \sqrt{10} = \pm 0.03m$$

١٠-٣-٣ سريان الأخطاء في معادلة ضرب

في حالة أن الكمية المحسوبة تساوي حاصل ضرب قيمتين مقاستين فأن الخطأ المتوقع سيكون:

C = A B

$$E_C = \pm\sqrt{A^2 E_b^2 + B^2 E_a^2} \qquad (10\text{-}6)$$

مثال ١:
تم قياس طول و عرض قطعة أرض مستطيلة الشكل فكانت الأرصاد كالتالي: ٢٥٢.٤٦ ± ٠.٠٥٣ متر و ٦٠٥.٠٨ ± ٠.٠٧٢ متر، أحسب مساحة قطعة الأرض و الخطأ المتوقع بها؟

المساحة = ٢٥٢.٤٦ × ٦٠٥.٠٨ = ١٥٢٧٦٠ متر مربع

$$E_C = \pm\sqrt{A^2 E_b^2 + B^2 E_a^2} = \pm\sqrt{(252.46)^2(0.072)^2 + (605.08)^2(0.053)^2} = \pm 36.9 m^2$$

١٠-٣-٤ سريان الأخطاء في المتوسط

عند قياس قيمة عدد n من المرات وكان خطأ القياس في كل رصده هو E فأن الخطأ المتوقع في متوسط هذه القياسات يبلغ:

$$E_{mean} = \pm E / \sqrt{n} \qquad (10\text{-}7)$$

مثال:
قيست مسافة عدد من المرات فكانت الأرصاد كالتالي: ٥٣٨.٥٧، ٥٣٨.٣٩، ٥٣٨.٣٧، ٥٣٨.٣٩، ٥٣٨.٤٨، ٥٣٨.٤٩، ٥٣٨.٣٣، ٥٣٨.٤٦، ٥٣٨.٤٧، ٥٣٨.٥٥ متر.

عدد الأرصاد n = ١٠

المتوسط = مجموع الأرصاد / n = ٥٣٨٤.٥٠ / ١٠ = ٥٣٨.٤٥ متر

وبإتباع المعادلة (٢-٧) لحساب الانحراف المعياري للرصدة الواحدة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = \pm 0.078 \text{ m}$$

وهو ما سنستخدمه في المعادلة (١٠-٧) علي أنه الخطأ المتوقع للرصدة الواحدة، ومن ثم فأن الخطأ المتوقع للمتوسط سيكون:

$$E_{mean} = \pm E / \sqrt{n} = \pm 0.078 / \sqrt{10} = \pm 0.025 m$$

١٠-٤ سريان الأخطاء للمعادلات غير الخطية

في حالة كون المعادلة الأساسية (لحساب قيمة بطريقة غير مباشرة من قيم مقاسة مباشرة) معادلة غير خطية non-linear فيتم استخدام ما يعرف باسم مجموعة مشتقات تايلور Taylor series expansion لتحويل المعادلة غير الخطية إلي معادلة خطية.

بافتراض أن لدينا القيمة المرصودة L التي لها معادلة أو دالة function غير خطية تجمعها مع القيم المجهولة x, y كالآتي:

$$L = f(x,y) \tag{10-8}$$

فان نظرية تايلور تجعل المعادلة في الصورة:

$$L = f(x_o, y_o) + \left(\frac{(\partial L/\partial x)_o}{1!}\right)dx + \left(\frac{(\partial^2 L/\partial x^2)_o}{2!}\right)dx^2 + \dots\dots + \left(\frac{(\partial^n L/\partial x^n)_o}{n!}\right)dx^n +$$
$$\left(\frac{(\partial L/\partial y)_o}{1!}\right)dy + \left(\frac{(\partial^2 L/\partial y^2)_o}{2!}\right)dy^2 + \dots\dots + \left(\frac{(\partial^n L/\partial y^n)_o}{n!}\right)dy^n + R$$

.... (10-9)

حيث:

x_o, y_o	قيم تقريبه لكلا من x, y المجهولين
$f(x_o,y_o)$	قيمة الدالة (المعادلة) f باستخدام القيم التقريبية x_o, y_o
R	المتبقيات remainder
dx, dy	التصحيحات المطلوبة للقيم التقريبية بحيث أن:

$$x = x_o + dx$$
$$y = y_o + dy \tag{10-10}$$

لكن القيم التي في المعادلة (١٠-٩) للحدود العليا لن تكون ذات تأثير كبير، مما يسمح لنا بتبسيط معادلة تايلور (بالتعامل مع التفاضل الأول للدالة الأصلية فقط) كما في الصورة التالية:

$$L = f(x_o, y_o) + (\partial L/\partial x)_o\, dx + (\partial L/\partial y)_o\, dy \tag{10-11}$$

وهذه صورة مبسطة لمعادلة تايلور ويسهل حسابها بمجرد اختيار القيم التقريبية x_o, y_o، إلا أن الناتج لن يكون دقيقا (بسبب إهمال الحدود العليا في المعادلة الأصلية) ومن ثم فتتم عملية تكرارية iterative بحيث أن الناتج من التكرار الأول يتم اعتباره قيم تقريبية مرة أخري لعمل التكرار الثاني ،،،،، وهكذا. أي أن خطوات الحساب ستتكون من:

١. نحدد قيم تقريبية x_o, y_o للقيم المجهولة، والتي يمكن الحصول عليها من الأرصاد الأساسية مع ملاحظة أنه كلما كانت القيم التقريبية قريبة من القيم الحقيقية (المجهولة) كلما أدي ذلك إلي عدد أقل من الخطوات التكرارية.
٢. نعوض بالقيم التقريبية في المعادلة (١٠-١١) فينتج لنا حل المعادلة أي قيم dx, dy
٣. نحسب قيم جديدة للمجاهيل من المعادلة (١٠-١٠) أي بإضافة التصحيحات السابقة إلي القيم التقريبية
٤. نستخدم القيم من الخطوة السابقة علي أنها قيم تقريبية جديدة، ونكرر الخطوتين السابقتين.
٥. تستمر هذه الخطوات التكرارية حتى تكون قيم التصحيحات dx, dy صغيرة جدا أو غير مؤثرة، وهذا ما يطلق عليه مصطلح أن حل المعادلة صار متقاربا converged.

<u>مثال:</u>

حول المعادلتين غير الخطيتين التاليتين إلي الصورة الخطية بهدف حلهما معا:

$$F(x,y): \quad x + y - 2y^2 = -4$$
$$G(x,y): \quad x^2 + y^2 = 8$$

نحسب التفاضل الأول لكل معادلة بالنسبة لكلا المجهولين x, y كالتالي:

$\delta F/\delta x = 1$ and $\delta F/\delta y = 1 -4y$

$\delta G/\delta x = 2x$ and $\delta G/\delta y = 2y$

وبتطبيق المعادلة (١٠-١١) نحصل علي :

$$L = f(x_o, y_o) + (\partial L/\partial x)_o\, dx + (\partial L/\partial y)_o\, dy$$

$$F = (x+y-2y^2) + 1\, dx + (1-4y)\, dy = -4$$

$$G = (x2+y2) + 2x\, dx + 2\, y\, dy = 8$$

الآن سنختار قيم تقريبية للمجهول x = ١ وللمجهول y = ١ ، أي أن:

$$x = 1 + dx$$

$$y = 1 + dy$$

نعوض بهذه القيم التقريبية في المعادلتين السابقتين:

$$F(x,y): \quad (x + y - 2y^2) + 1\, dx + (1-4y)\, dy = -4$$

$$F(x,y):\quad 1 + 1 - 2\,(1)^2 + dx + (1 - 4(1))\,dy = -4$$
$$dx + dy - 4\,dy = -4$$
$$dx - 3\,dy = -4$$

$$G(x,y):\quad (x^2 + y^2) + 2x\,dx + 2y\,dy = 8$$
$$G(x,y):\quad ((1)^2 + (1)^2) + 2\,(1)\,dx + 2\,(1)\,dy = 8$$
$$2 + 2\,dx + 2\,dy = 8$$
$$2\,dx + 2\,dy = 6$$
$$dx + dy = 3$$

الآن أصبح لدينا معادلتين خطيتين (بدلا من المعادلتين الأصليتين غير الخطيتين) مما يجعل حلهما معا أسهل و أسرع وأبسط. فنقوم بحلهما آنيا simultaneously لحساب قيمة كلا من dx, dy كالتالي:

من المعادلة الأولي:

$$dx - 3\,dy = -4$$
$$dx = -4 + 3\,dy$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$dx + dy = 3$$
$$(-4 + 3\,dy) + dy = 3$$
$$4\,dy = 7$$
$$dy = 7/4 = 1.75$$

ونعوض فنعوض بهذه القيمة في المعادلة الأولي:

$$dx - 3\,dy = -4$$
$$dx - 3\,(1.75) = -4$$
$$dx = -4 + 5.25 = 1.25$$

إذن القيمة المحسنة للمجهولين x, y تصبح الآن (من المعادلة ١٠-١٠):

$$x = x_0 + dx = 1 + 1.25 = 2.25$$
$$y = y_0 + dy = 1 + 1.75 = 2.75$$

كانت هذه هي خطوات التكرار الأول first iteration، والآن سنبدأ في إعادة نفس الخطوات <u>للتكرار الثاني</u>:

$$F(x,y):\quad (x + y - 2y^2) + 1\,dx + (1-4y)\,dy = -4$$
$$F(x,y):\quad 2.25 + 2.75 - 2\,(2.75)^2 + dx + (1 - 4(2.75))\,dy = -4$$

$$G(x,y): \quad (x^2 + y^2) \quad + 2x\,dx \quad + 2y\,dy \quad = 8$$
$$G(x,y): \quad ((2.25)^2 + (2.75)^2) + 2\,(2.25)\,dx + 2\,(2.75)\,dy = 8$$

وبنفس الطريقة نحل هاتين المعادلتين الخطيتين معا، فنحصل علي النتائج التالية:

$dx = - 0.25$
$dy = - 0.64$

ومن ثم فأن القيم المحسنة للمجهولين x, y تصبح:

$x = x_0 + dx = 2.25 - 0.25 = 2.00$
$y = y_0 + dy = 2.75 - 0.64 = 2.11$

ثم نستمر بنفس الأسلوب في التكرار الثالث:

$$F(x,y): \quad (x + y - 2y^2) \quad + 1\,dx + (1-4y)\,dy \quad = -4$$
$$F(x,y): \quad 2.00 + 2.11 - 2\,(2.11)^2 + dx + \quad (1 - 4(2.11))\,dy = -4$$

$$G(x,y): \quad (x^2 + y^2) \quad + 2x\,dx \quad + 2y\,dy \quad = 8$$
$$G(x,y): \quad ((2.00)^2 + (2.11)^2) + 2\,(2.00)\,dx + 2\,(2.11)\,dy = 8$$

وبنفس الطريقة نحل هاتين المعادلتين الخطيتين معا، فنحصل علي النتائج التالية:

$dx = 0.00$
$dy = - 0.11$

ومن ثم فأن القيم المحسنة للمجهولين x, y تصبح:

$x = x_0 + dx = 2.00 + 0.00 = 2.00$
$y = y_0 + dy = 2.11 - 0.11 = 2.00$

ثم نستمر بنفس الأسلوب في التكرار الرابع:

$$F(x,y): \quad (x + y - 2y^2) \quad + 1\,dx + (1-4y)\,dy \quad = -4$$
$$F(x,y): \quad 2.00 + 2.00 - 2\,(2.00)^2 + dx + \quad (1 - 4(2.00))\,dy = -4$$

$$G(x,y): \quad (x^2 + y^2) \quad + 2x\,dx \quad + 2y\,dy \quad = 8$$
$$G(x,y): \quad ((2.00)^2 + (2.00)^2) + 2\,(2.00)\,dx + 2\,(2.00)\,dy = 8$$

وبنفس الطريقة نحل هاتين المعادلتين الخطيتين معا، فنحصل علي النتائج التالية:

$dx = 0.00$

dy = 0.00

وهنا سنجد أن قيم التصحيحات (dx, dy) أصبحت صفرا، أي أن حل المعادلتين أصبح متقاربا converged ومن ثم فأن آخر قيم حصلنا عليها للمجهولين x, y (من التكرار الثالث) هي القيم المطلوبة:

x = 2.00 , y = 2.00

<u>١٠-٥ أمثلة لسريان الأخطاء للمعادلات غير الخطية فى التطبيقات المساحية</u>

<u>مثال ١:</u>

لقياس ارتفاع برج تم استخدام ثيودليت لقياس زاوية ارتفاع قمة البرج فكان متوسط عدة قياسات ٣٠' ٢° ± ١'. وتم قياس المسافة الأفقية فكانت النتيجة ١٤٣.٥ ± ٠.٥ متر. أحسب القيمة الأكثر احتمالا لارتفاع هذا البرج.

المعادلة غير الخطية لارتفاع البرج (الميزانية المثلثية) :

$$h = D \tan \theta$$
$$= 143.5 \tan 2^{o}\ 30' = 6.268 \text{ m}$$

حيث:

h ارتفاع البرج
D المسافة الأفقية
θ الزاوية الرأسية

وتكون المشتقة التفاضلية لهذه المعادلة بالنسبة لكلا من h, D كالآتي:

$$\delta h / \delta D = \tan \theta$$
$$\delta h / \delta \vartheta = D / \cos^2 \theta$$

ومن ثم فأن تطبيق المعادلة (١٠-٦):

$$E_C = \pm\sqrt{A^2 E_b^2 + B^2 E_a^2}$$

يعطي في المثال الحالي المعادلة التالية:

$$\sigma_h^2 = \sqrt{\sigma_D^2 (\delta h / \delta \theta)^2 + \sigma_\theta^2 (\delta h / \delta D)^2}$$

$$\sigma_h^2 = \sqrt{\sigma_D^2 (\tan^2 \theta)^2 + \sigma_\theta^2 (D / \cos^2 \theta)^2}$$

$$\sigma_h^2 = \sqrt{0.5^2 (\tan^2 \theta)^2 + 1' (143.5 / \cos^2 \theta)^2}$$

ولتوحيد وحدات أية معادلة بها وحدات طولية و وحدات زاوية: فيتم تحويل وحدات الزاوية بالثواني إلي وحدات طولية بقسمتها علي الثابت ٢٠٦٢٦٥ ، أو تحويل وحدات الزاوية بالدقائق إلي وحدات طولية بقسمتها علي الثابت ٢٠٦٢٦٥/٦٠=٣٤٣٨.

$$\sigma_h^2 = \sqrt{0.5^2(\tan^2\theta)^2 + (1'/3438)(143.5/\cos^2\theta)^2} = \pm 0.047m$$

أي أن ارتفاع البرج يبلغ ٦.٢٦٨ ± ٠.٠٤٧ متر

<u>مثال ٢:</u>

عند استخدام التاكيومترية كانت متوسط زاوية الارتفاع ٢٢' ٣° بخطأ محتمل ± ١'، ومتوسط المسافة المقطوعة علي القامة بشعرات الاستاديا هي ٢.٨٤ متر بخطأ محتمل ± ٣ سنتيمتر وكان الثابت التاكيومتري للجهاز يساوي ١٠٠. ما هي القيم الأكثر احتمالا لكلا من المسافة الأفقية و فرق المنسوب؟

أولا المسافة الأفقية (المعادلة ٦-١):

$$D = c\,H\cos^2\theta$$
$$= 100 \times 2.84 \times \cos^2 3^\circ 22' = 283.021\ m$$

حيث:

D المسافة الأفقية
c الثابت التاكيومتري للجهاز
H المسافة المقطوعة بشعرات الاستاديا
θ الزاوية الرأسية

وتكون المشتقات التفاضلية لهذه المعادلة كالآتي:

$$\delta D/\delta H = c\cos^2\theta = 100\cos^2\theta = 99.655$$
$$\delta D/\delta\vartheta = 2cH\cos\theta\sin\theta = -33.298$$

ومن ثم فأن تطبيق المعادلة (١٠-٦) يعطي في المثال الحالي المعادلة التالية:

$$\sigma_D^2 = \sqrt{\sigma_H^2(\delta D/\delta H)^2 + \sigma_\theta^2(\delta D/\delta\theta)^2} = \sqrt{(99.655x0.03)^2 + (-33.298x1/3438)^2} = \pm 2.989$$

ومن ثم فأن المسافة الأفقية تكون ٢٨٣.٠٢١ ± ٢.٩٨٩ متر

ثانيا فرق المنسوب (المعادلة ٦-٢):

$$Y = 0.5\,c\,H\sin 2\theta$$

$$= 0.5 \times 100 \times 2.84 \times \sin 6^{o}\ 44' = 16.649\ m$$

حيث:

Y فرق المنسوب

وتكون المشتقات التفاضلية لهذه المعادلة كالآتي:

$$\delta Y / \delta H = 0.5 c \sin 2\theta = 5.862$$

$$\delta Y / \delta \vartheta = cH \cos 2\theta = 282.041$$

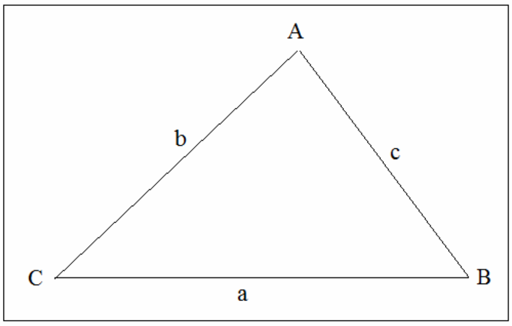
ومن ثم فأن تطبيق المعادلة (١٠-٦) يعطي في المثال الحالي المعادلة التالية:

$$\sigma_Y^2 = \sqrt{\sigma_H^2 (\delta Y / \delta H)^2 + \sigma_\theta^2 (\delta Y / \delta \theta)^2} = \sqrt{(5.862 x 0.03)^2 + (282.041 x 1/3438)^2} = \pm 0.194$$

ومن ثم فأن فرق المنسوب يكون ١٦.٦٤٩ ± ٠.١٩٤ متر

<u>مثال ٣:</u>

احسب المساحة وانحرافها المعياري لقطعة أرض علي شكل مثلث معلوم له القياسات التالية:



$$a = 472.58 \pm 0.09\ m,\ b = 214.55 \pm 0.06\ m,\ C = 37^{o}\ 15'\ 00'' \pm 30''$$

معادلة (دالة) حساب مساحة مثلث بمعلومية ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما كالتالي:

$$Area = F(a, b, C) = 0.5\ a\ b \sin C$$

$$= 0.5 \times 472.58 \times 214.55 \sin 37^{o}\ 15'\ 00'' = 30685.996\ m^2$$

وبتطبيق مبدأ المعادلة (١٠-٦) علي الدالة F(a, b, C) التي تحتوي علي ثلاثة متغيرات فأنها تصبح:

$$\sigma_F^2 = \sqrt{\sigma_a^2(\delta f / \delta a)^2 + \sigma_b^2(\delta F / \delta b)^2 + \sigma_C^2(\delta F / \delta C)^2}$$

ويكون التفاضل الأول للمعادلة في كلا من a, b, C كالتالي:

$$\delta F / \delta a = 0.5b \sin C = 0.5x472.58 \sin 37^o 15' = 64.955$$

$$\delta F / \delta b = 0.5a \sin C = 0.5x214.55 \sin 37^o 15' = 143.074$$

$$\delta F / \delta C = 0.5ab \cos C = 0.5x472.58x214.55 \cos 37^o 15' = 40346.102$$

ومن ثم فأن:

$$\sigma_F^2 = \sqrt{(64.955^2 x0.09^2) + (143.074^2 x0.06^2) + (40346.102^2 x(30'' / 206265)^2)} = 142.303$$

$$\sigma_F = 11.9m^2$$

مرة أخري لاحظ في الجزء الثالث من المعادلة الأخيرة أننا قمنا بقسمة الانحراف المعياري للزاوية C علي الثابت ٢٠٦٢٦٥ لتوحيد الوحدات الطولية للمعادلة.

إذن: مساحة قطعة الأرض تبلغ ٣٠٦٨٦ ± ١٢ متر مربع.

مثال ٤:

في المثال السابق إذا أردنا حساب مساحة قطعة الأرض بدقة ± ٨ متر مربع، فما هي الدقة المطلوبة لقياس أطوال أضلاع المثلث بفرض ان دقة قياس الزاوية ستظل كما هي؟

بفرض أن دقة قياس كلا الضلعين a, b متساوية:

$$\sigma_a = \sigma_b$$

$$\sigma^2{}_F = 8$$

فأن:

$$8^2 = \sqrt{(64.955^2 x{\sigma_a}^2) + (143.074^2 x{\sigma_b}^2) + (40346.102^2 x(30'' / 206265)^2)}$$

$$\sigma_a = \sigma_b = \pm 0.03m$$

أي أنه يجب قياس كلا طولي الضلعين بدقة ± ٣ سنتيمترات.

١٠-٦ سريان الأخطاء للمعادلات غير الخطية باستخدام المصفوفات

يمكن حل مجموعة المعادلات غير الخطية (بتحويلهم إلي معادلات خطية باستخدام معادلة مجموعة مشتقات تايلور) باستخدام جبر المصفوفات بدلا من حلهم بالطريقة العادية السابقة، مما يجعل خطوات الحل أسهل وقابلة للبرمجة. ولتسهيل خطوات الحل بجبر المصفوفات يتم تكوين مصفوفة تسمي مصفوفة جاكوب Jacobian Matrix تتكون عناصرها من التفاضل الأول لكل معادلة بالنسبة لكل عنصر من العناصر المجهولة. ففي المثال السابق فأن مصفوفة جاكوب J ستكون علي النحو التالي:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix}$$

أي أن الصف الأول في المصفوفة هو تفاضل المعادلة الأولي بالنسبة للمجهول x والصف الثاني هو تفاضل المعادلة الثانية بالنسبة للمجهول y.

ومن ثم فأن المعادلتين الأساسيتين يمكن وضعهما في صورة مصفوفات كالتالي:

$$J\,X = K \qquad (10\text{-}12)$$

حيث X مصفوفة تصحيحات القيم المجهولة matrix of unknown corrections أي dx, dy و K مصفوفة القيم الثابتة matrix of constants كالآتي:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1-4y_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -4 - F(x_0, y_0) \\ 8 - G(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

وتبدأ خطوات الحل بحساب قيم عناصر المصفوفتين J, K باستخدام القيم التقريبية x_o, y_o ثم حل المعادلة (١٠-١٢) :

$$X = k\,J^{-1} \qquad (10\text{-}13)$$

للحصول علي قيم عناصر المصفوفة X (أي التصحيحات dx, dy)، ثم بدء عملية التكرار iteration كما في الطريقة العادية لحل المعادلات.

مثال ١:

أوجد حل المعادلتين غير الخطيتين التاليتين:

$$F(x,y) = x^2 + 3\,xy - 4y^2 = 6$$

$G(x,y) = x + xy - y^2 = 3$

نحسب التفاضل الأول لكل معادلة بالنسبة لكلا المجهولين x, y كالتالي:

$\delta F/\delta x = 2x + 3y$ and $\delta F/\delta y = 3x - 8y$

$\delta G/\delta x = 1 + y$ and $\delta G/\delta y = x - 2y$

أي أن مصفوفة جاكوب ستكون كالتالي:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 + 3y_0 & 3x_0 - 8y_0 \\ 1 + y_0 & x_0 - 2y_0 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فأن المعادلات بطريقة المصفوفات ستصبح:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 + 3y_0 & 3x_0 - 8y_0 \\ 1 + y_0 & x_0 - 2y_0 \end{bmatrix}$$

<u>التكرار الأول:</u>

نختار القيم التقريبية كالتالي: $x_o=3, y_o = 0$ ونعوض بهذه القيم في كلا من J, K :

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-9 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثم نستخدم طريقة المحددات determinant لحساب مقلوب المصفوفة J (أنظر الفصل الثالث) كالتالي:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فأن قيم المجهولين x, y يمكن حسابهما كالتالي:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

<u>التكرار الثاني:</u>

نستخدم قيم x,y الناتجة من التكرار الأول علي أنهما قيم تقريبية جديدة للتكرار الثاني ونعيد الخطوات السابقة لنحصل علي نظام المعادلات التالي:

$$\begin{bmatrix} 4.9 & 3.6 \\ 1.3 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 5.44 \\ 3 - 2.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.49 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نحصل علي قيم التصحيحات dx, dy الجديدة كالتالي:

dx = -0.45
dy = 0.77

ومن ثم فأن القيم الجديدة للمجهولين تصبح:

x = 2.0 - 0.45 = 1.55
y = 0.3 + 0.77 = 1.07

ثم نبدأ التكرار الثالث باستخدام هذه القيم كقيم تقريبية من جديد ، وهكذا تستمر عملية التكرار حتى نصل للحالة التي تكون فيها قيم التصحيحات dx, dy تساوي صفر. وفي نهاية عملية التكرار نحصل علي قيم المجهولين النهائيين x = 2.00 و y = 1.00 .

مثال ٢:

تم رصد الإحداثيات x,y لثلاثة نقاط علي دائرة فكانت القيم كالتالي: (٩.٤،٥.٦) و (٧.٦،٧.٢) و (٣.٨،٤.٨). أحسب إحداثيات مركز هذه الدائرة (h,k) إذا علمت أن معادلة الدائرة هي:
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
حيث r يمثل نصف قطر الدائرة.

لدينا ٣ قيم مجهولة h, k, r وثلاثة معادلات من النقاط الثلاثة المرصودة.

نعيد صياغة معادلة الدائرة لتصبح:

$$C(h,k,r) = (x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2 = 0$$

ويكون التفاضل الأول لهذه المعادلة بالنسبة للمجاهيل الثلاثة كالتالي:

$\delta C/\delta h = -2\ (x - h)$
$\delta C/\delta k = -2\ (y - k)$
$\delta C/\delta r = -2\ r$

كل نقطة مرصودة ستعطي معادلة، ومن ثم يصبح نظام المعادلات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial h} & \frac{\partial C_1}{\partial k} & \frac{\partial C_1}{\partial r} \\ \frac{\partial C_2}{\partial h} & \frac{\partial C_2}{\partial k} & \frac{\partial C_2}{\partial r} \\ \frac{\partial C_3}{\partial h} & \frac{\partial C_2}{\partial k} & \frac{\partial C_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh \\ dk \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - [(x_1 - h_0)^2 + (y_1 - k_0)^2 - r_0^2] \\ 0 - [(x_2 - h_0)^2 + (y_2 - k_0)^2 - r_0^2] \\ 0 - [(x_3 - h_0)^2 + (y_3 - k_0)^2 - r_0^2] \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بالتفاضل الأول ينتج لدينا نظام المعادلات التالي:

$$\begin{bmatrix} -2(x_1 - h_0) & -2(y_1 - k_0) & -2r_0 \\ -2(x_2 - h_0) & -2(y_2 - k_0) & -2r_0 \\ -2(x_3 - h_0) & -2(y_3 - k_0) & -2r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh \\ dk \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - [(x_1 - h_0)^2 + (y_1 - k_0)^2 - r_0^2] \\ 0 - [(x_2 - h_0)^2 + (y_2 - k_0)^2 - r_0^2] \\ 0 - [(x_3 - h_0)^2 + (y_3 - k_0)^2 - r_0^2] \end{bmatrix}$$

ويمكن تبسيط المعادلة السابقة بقسمة كلا طرفيها علي -٢ لتصبح:

$$\begin{bmatrix} (x_1 - h_0) & (y_1 - k_0) & r_0 \\ (x_2 - h_0) & (y_2 - k_0) & r_0 \\ (x_3 - h_0) & (y_3 - k_0) & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh \\ dk \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5[(x_1 - h_0)^2 + (y_1 - k_0)^2 - r_0^2] \\ 0.5[(x_2 - h_0)^2 + (y_2 - k_0)^2 - r_0^2] \\ 0.5[(x_3 - h_0)^2 + (y_3 - k_0)^2 - r_0^2] \end{bmatrix}$$

نفترض قيم تقريبية للمجاهيل كالتالي: $h_0=7,\ k_o=4.5,\ r_o=3$ ونعوض بهم في المعادلة السابقة لتصبح:

$$\begin{bmatrix} 9.4 - 7 & 5.6 - 4.5 & 3 \\ 7.6 - 7 & 7.2 - 4.5 & 3 \\ 3.8 - 7 & 4.8 - 4.5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh \\ dk \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5[(9.4 - 7)^2 + (5.6 - 4.5)^2 - 3^2] \\ 0.5[(7.6 - 7)^2 + (7.2 - 4.5)^2 - 3^2] \\ 0.5[(3.8 - 7)^2 + (4.8 - 4.5)^2 - 3^2] \end{bmatrix}$$

وتكون (بعد الحسابات) في صورتها التالية:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & 1.1 & 3 \\ 0.6 & 2.7 & 3 \\ -3.2 & 0.3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dh \\ dk \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.015 \\ -0.675 \\ 0.665 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المعادلة المصفوفية نحصل علي قيم التصحيحات:

$$\begin{bmatrix} dh \\ dk \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.28462 \\ -0.10769 \\ -0.07115 \end{bmatrix}$$

وبإضافة هذه التصحيحات إلي القيم التقريبية للمجاهيل الثلاثة نحصل علي الحل:

h = 6.7154, k = 4.3923, r = 2.9288

وبعد ثلاثة تكرارات (بنفس الخطوات السابقة) نحصل علي الحل النهائي:

h = 6.72, k = 4.39, r = 2.94

١٠-٧ معادلات سريان الأخطاء فى الأرصاد المساحية ثنائية الأبعاد

يشتمل عدد كبير من الأرصاد المساحية علي معادلات غير خطية مثل حساب المسافة بين نقطتين بمعلومية إحداثيات كلا منهما، وعند استخدام نظرية مجموع أقل المربعات لضبط هذه الأرصاد (كما سنري في الفصول القادمة) يلزمنا تحويل هذه المعادلات إلي معادلات خطية بطريقة مجموعة مشتقات تايلور. والمعادلات القادمة تقدم أمثلة لهذه التطبيقات.

١٠-٧-١ معادلة المسافة الأفقية

المعادلة الأصلية غير الخطية لحساب المسافة الأفقية بين نقطتين معلومتي الإحداثيات هي:

$$AB + v_{AB} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} \qquad (10\text{-}14)$$

حيث:

AB المسافة بين النقطتين i, j

v_{AB} الخطأ المتبقي residual للمسافة

X_A, Y_A إحداثيات النقطة الأولي A

X_B, Y_B إحداثيات النقطة الثانية B

وبتطبيق طريقة مجموعة مشتقات تايلور فأن المعادلة الخطية لهذه المسافة ستكون كالآتي:

$$\left(\frac{X_A - X_B}{AB}\right)_o dX_A + \left(\frac{Y_A - Y_B}{AB}\right)_o dY_A + \left(\frac{X_B - X_A}{AB}\right)_o dX_B + \left(\frac{Y_B - Y_A}{AB}\right)_o dY_B = k_{AB} + v_{AB}$$

.... (10-15)

حيث:

dx, dy التصحيحات المجهولة أو المطلوب حسابها

k_{AB} الفرق بين كلا من $(AB)_o$ و L_{AB} حيث:

$(AB)_o$ المسافة المحسوبة بالمعادلة (١٠-١٤)

L_{AB} المسافة المرصودة

مثال:

أكتب المعادلة الخطية للمسافة AB التي تم قياسها فكانت ١٣٢.٨٢٣ متر علما بأن إحداثيات نقطة A هي ١٠٢٣.١٥١ ، ٨٧٣.٠١٨ متر و إحداثيات نقطة B هي ١٠٩٤.٣١٠ ، ٩٨٥.١٦٣ متر.

نحسب فروق الإحداثيات التقريبية:

$(X_B-X_A)_O = 1094.310 - 1023.151 = 71.159$ m
$(Y_B-Y_A)_O = 985.163 - 873.018 = 112.145$ m

نحسب المسافة التقريبية:
$(AB)_o = (71.159^2 + 112.145^2)^{0.5} = 132.816$ m

نعوض بهذه القيم في المعادلة (١٠-١٥) للحصول علي المعادلة الخطية التالية:

$$(-71.159/132.816)_o dX_A + (-112.145/132.816)_o dY_A + (71.159/132.816)_o dX_B + (112.145/132.816)_o dY_B = (132.823 - 132.816) + v_{AB}$$

$$-0.53577dX_A - 0.84436dY_B + 0.53577dX_B + 0.84436dY_B = 0.007 + v_{AB}$$

١٠-٧-٢ معادلة الانحراف

المعادلة الأصلية غير الخطية لحساب الانحراف $AZ_{i,j}$ بين نقطتين معلومتي الإحداثيات i , j هي:

$$AZ_{i,j} + v_{i,j} = \tan^{-1}\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} \right) + C \qquad (10\text{-}16)$$

حيث:
C ثابت يعتمد علي اتجاه الخط، فان كان الانحراف يتراوح بين ٠^0 و ٩٠^o فأن قيمة C = صفر، وان كان الانحراف يتراوح بين ٩٠^0 و ٢٧٠^o فأن قيمة C = ١٨٠^o ، وان كان الانحراف يتراوح بين ٢٧٠^0 و ٣٦٠^o فأن قيمة C = ٣٦٠^o.

وبتطبيق طريقة مجموعة مشتقات تايلور فأن المعادلة الخطية لهذا الانحراف ستكون كالآتي:

$$\rho\left(\frac{Y_j - Y_i}{ij^2}\right)_o dX_i + \rho\left(\frac{X_j - X_i}{ij^2}\right)_o dY_i + \rho\left(\frac{Y_j - Y_i}{ij^2}\right)_o dX_j + \rho\left(\frac{X_j - X_i}{ij^2}\right)_o dY_j + = k_{ij} + v_{ij}$$
.... (10-17)

حيث:

ρ (الحرف اللاتيني رو) = ٢٠٦٢٦٥ ويتم استخدامه لتحويل وحدات units الطرف الأيسر للمعادلة من وحدات طولية إلي وحدات زاوية بالثواني حيث أن وحدات الطرف الأيمن للمعادلة (القيمة الثابتة k والخطأ المتبقي للانحراف v) ستكون بالثواني.

أما العنصر k_{ij} فيتم حسابه كالتالي:

$$k_{ij} = AZ_{ij} - \tan^{-1}\left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i}\right)_o + C \qquad (10\text{-}18)$$

حيث:

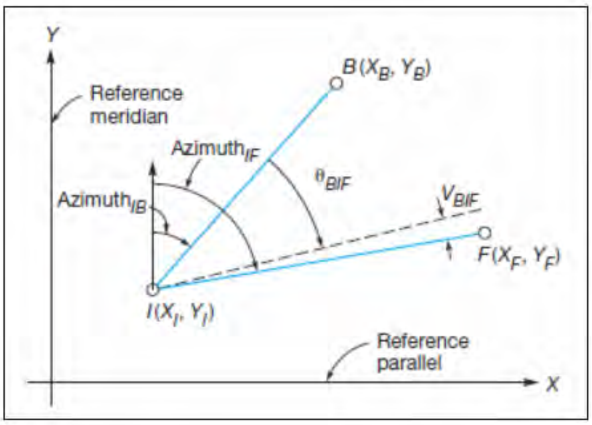
AZ_{ij} الانحراف المرصود

$(X_i, Y_i)_o$ القيم التقريبية لإحداثيات النقطة i

$(X_j, Y_j)_o$ القيم التقريبية لإحداثيات النقطة j

١٠-٧-٣ معادلة الزاوية الأفقية

يمكن كتابة المعادلة الأصلية غير الخطية لحساب الزاوية الأفقية BIF (و نرمز لها بالرمز θ_{BIF}) باعتبار أنها تساوي الفرق بين انحرافي خطين IF و IB يصلان بين ثلاثة نقاط معلومة الإحداثيات I, F, B. وحيث أن كل انحراف يمكن التعبير عنه بدلالة إحداثيات نقطتي طرفي الخط (كما سبق) فأن معادلة الزاوية الأفقية يمكن كتابتها كالتالي:



$$\theta_{BIF} + v_{BIF} = \tan^{-1}\left(\frac{X_F - X_I}{Y_F - Y_I}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_B - X_I}{Y_B - Y_I}\right) + D \qquad (10\text{-}19)$$

حيث:

D ثابت = $C_{IF} - C_{IB}$ أي الفرق بين الثابت C (كما سبق تعريفه) للخطين IF, IB .

θ_{BIF} الزاوية المرصودة

وبتطبيق طريقة مجموعة مشتقات تايلور فأن المعادلة الخطية لهذه الزاوية الأفقية ستكون كالآتي:

$$\rho(\tfrac{Y_I - Y_B}{IB^2})_o dX_B + \rho(\tfrac{X_B - X_I}{IB^2})_o dY_B + \rho(\tfrac{Y_B - Y_I}{IB^2} - \tfrac{Y_F - Y_I}{IF^2})_o dX_I +$$
$$\rho(\tfrac{X_I - X_B}{IB^2} - \tfrac{X_I - X_F}{IF^2})_o dY_I + \rho(\tfrac{Y_F - Y_I}{IF^2})_o dX_F + \rho(\tfrac{X_I - X_F}{IF^2})_o dY_F =$$
$$K_{BIF} + v_{BIF}$$

.... (10-20)

حيث:

$$k_{BIF} = \theta_{BIF} - \tan^{-1}(\tfrac{Y_F - Y_I}{X_F - X_I}) - \tan^{-1}(\tfrac{X_B - X_I}{Y_B - Y_I}) + D \qquad (10\text{-}21)$$

<u>مثال:</u>

قيست الزاوية الأفقية GAB فوجدت تساوي ٤٠" ٢٩' ١٠٧° وكانت إحداثيات النقطة G كالتالي ٥٧٨.٧٤١ ، ١١٠٣.٨٢٦ متر وإحداثيات النقطة A تساوي ٤١٥.٢٧٣ ، ٩٢٩.٨٦٨ متر و إحداثيات النقطة B تساوي ٥٠٧.٩٣٤ ، ٧٦٤.٦٥٢ متر. أكتب المعادلة الخطية لهذه الزاوية؟

حساب فروق الإحداثيات التقريبية:

$(X_G\text{-}X_A)_o$ = 578.741 - 415.273 = - 163.468 m
$(Y_G\text{-}Y_A)_o$ = 1103.826 - 929.868 = 173.958 m
$(X_B\text{-}X_A)_o$ = 507.934 - 415.273 = 92.661 m
$(Y_B\text{-}X_A)_o$ = 764.652 - 929.868 = -165.216 m

حساب المسافات التقريبية:

$$AG_O = \sqrt{(163.468)^2 + (173.958)^2} = 238.711 \text{ m}$$
$$AB_O = \sqrt{(92.661)^2 + (-165.216)^2} = 189.726 \text{ m}$$

حساب الزاوية الأفقية التقريبية:

$$GAB_O = \tan^{-1}(\tfrac{92.661}{-165.216}) - \tan^{-1}(\tfrac{163.468}{173.958}) + 180^O = 107^O 29' 42''$$

ومن ثم فأن المعادلة الخطية (١٠-٢٠) لهذه الزاوية الأفقية تصبح:

$$\rho(\tfrac{-173.958}{238.711^2})_o dX_G + \rho(\tfrac{163.468}{238.711^2})_o dY_G +$$

$$\rho\left(\frac{173.958}{238.711^2} - \frac{-165.216}{189.726^2}\right)_o dX_A +$$
$$\rho\left(\frac{-16.468}{238.711^2} - \frac{-92.661}{189.726^2}\right)_o dY_A +$$
$$\rho\left(\frac{-165.216}{189.726^2}\right)_o dX_B + \rho\left(\frac{-92.661}{189.726^2}\right)_o dY_B = \quad (107^{o}29'40'' - 107^{o}29'42'' + v_{GAB}$$

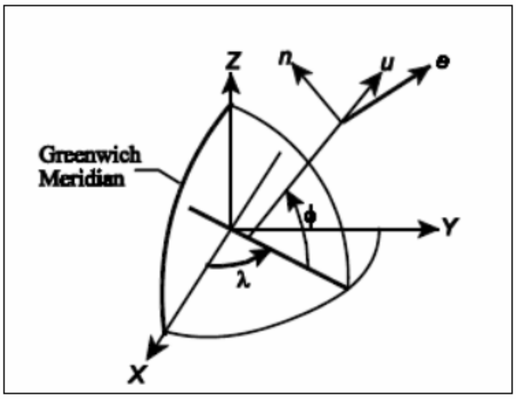
أي أن:

$$-629.684''\ dX_G + 591.713''\ dY_G + 1579.405''\ dX_A - 59.065''\ dY_A - 949.721''\ dX_B - 532.649''\ dY_B = -2'' + v_{GAB}$$

١٠-٨ معادلات سريان الأخطاء في الأرصاد المساحية ثلاثية الأبعاد

في التطبيقات الجيوديسية فأن الأرصاد تشمل أيضا معادلات غير خطية لكنها تعتمد علي استخدام الإحداثيات ثلاثية الأبعاد (X,Y,Z ، أو خط الطول λ ودائرة العرض φ و الارتفاع) للنقاط وليس مجرد الإحداثيات الأفقية (X,Y) كما في الجزء السابق. وعند استخدام نظرية مجموع أقل المربعات لضبط هذه الأرصاد يلزمنا أيضا تحويل هذه المعادلات إلي معادلات خطية بطريقة مجموعة مشتقات تايلور. والمعادلات القادمة تقدم أمثلة لهذه التطبيقات.

حيث أن قياسات المحطة الشاملة Total station تنتج إحداثيات ثلاثية (وليست ثنائية) الأبعاد فأننا سنستخدم في معادلات هذا الجزء الإحداثيات في النظام الجيوديسي المحلي local geodetic coordinate system (الرموز e, n, u) والذي يمكن الحصول عليه من الإحداثيات في النظام الجيوديسي المركزي geocentric coordinate system (X, Y, Z) من المعادلة التالية:



$$\begin{bmatrix} \Delta n \\ -\Delta e \\ \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}22)$$

حيث:

λ خط الطول لنقطة الرصد

φ دائرة العرض لنقطة الرصد

ΔX $X_j - X_i$
ΔY $Y - Y_i$
ΔZ $Z_j - Z_i$

أي أنه يمكن الحصول علي إحداثيات النظام الجيوديسي المحلي كالتالي:

$$\begin{aligned} \Delta n &= s \cos v \cos \mathrm{Az} \\ \Delta e &= s \cos v \sin \mathrm{Az} \\ \Delta u &= s \sin v \end{aligned} \qquad (10\text{-}23)$$

حيث:
s المسافة المائلة
v الزاوية الرأسية
Az الانحراف

وبالعكس فيمكن حساب المسافة المائلة و الزاوية الرأسية و الانحراف كالتالي:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\Delta n^2 + \Delta e^2 + \Delta u^2} \\ \mathrm{Az} &= \tan^{-1} \frac{\Delta e}{\Delta n} \\ v &= \sin^{-1} \frac{\Delta u}{s} \end{aligned} \qquad (10\text{-}24)$$

أما باستخدام إحداثيات النظام الجيوديسي المركزي فأن المعادلات غير الخطية حساب المسافة المائلة IJ والانحراف AZ_{ij} والزاوية الرأسية v_{ij} وزاوية السمت z_{ij} بين النقطتين i, j فيتم كالتالي:

$$IJ = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \qquad \textbf{(10-25)}$$

$$\mathrm{Az}_{ij} = \tan^{-1} \frac{-\Delta X \sin \lambda_i + \Delta Y \cos \lambda_i}{-\Delta X \sin \phi_i \cos \lambda_i - \Delta Y \sin \phi_i \sin \lambda_i - \Delta Z \cos \phi_i} \qquad \textbf{(10-26)}$$

$$v_{ij} = \sin^{-1} \frac{\Delta X \cos \phi_i \cos \lambda_i + \Delta Y \cos \phi_i \sin \lambda_i + \Delta Z \sin \phi_i}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \qquad \textbf{(10-27)}$$

$$z_{ij} = \cos^{-1} \frac{\Delta X \cos \phi_i \cos \lambda_i + \Delta Y \cos \phi_i \sin \lambda_i + \Delta Z \sin \phi_i}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \qquad \textbf{(10-28)}$$

وهذه هي المعادلات المطلوب تحويلها إلي معادلات خطية بتطبيق مجموعة مشتقات تايلور كما في الأجزاء القادمة.

١٠-٨-١ معادلة المسافة المائلة

المعادلة الخطية لحساب المسافة المائلة بين نقطتين **I, J** تتكون من:

$$a_1 dn_i + a_2 de_i + a_3 du_i + a_4 dn_j + a_5 de_j + a_6 du_j = s_{ij} - IJ_o \qquad (10\text{-}29)$$

حيث:

IJ_o المسافة المحسوبة من المعادلة (١٠-٢٥)
s_{ij} المسافة المائلة المقاسة

$$a_1 = -(\cos v_{ij} \cos AZ_{ij})_o$$

$$a_2 = -(\cos v_{ij} \sin AZ_{ij})_o$$

$$a_3 = -(\sin v_{ij})_o$$

$$a_4 = -(\cos v_{ij} \cos AZ_{ij})_o$$

$$a_5 = -(\cos v_{ij} \sin AZ_{ij})_o$$

$$a_6 = -(\sin v_{ij})_o$$

١٠-٨-٢ معادلة الانحراف

المعادلة الخطية لحساب الانحراف بين نقطتين **I, J** تتكون من:

$$b_1 dn_i + b_2 de_i + b_3 du_i + b_4 dn_j + b_5 de_j + b_6 du_j = \alpha - AZ_o \qquad (10\text{-}30)$$

حيث:
AZ_o الانحراف المحسوب من المعادلة (١٠-٢٦)
α الانحراف المقاس

$$b_1 = \left(\frac{\sin Az_{ij}}{IJ \cos v_{ij}}\right)_0$$

$$b_2 = -\left(\frac{\cos Az_{ij}}{IJ \cos v_{ij}}\right)_0$$

$$b_3 = 0$$

$$b_4 = -\left\{\frac{\sin Az_{ij}}{IJ \cos v_{ij}}\left[\cos(\phi_j - \phi_i) + \frac{\sin \phi_j \sin(\lambda_j - \lambda_i)}{\tan Az_{ij}}\right]\right\}_0$$

$$b_5 = \left\{\frac{\cos Az_{ij}}{IJ \cos v_{ij}}[\cos(\lambda_j - \lambda_i) - \sin \phi_i \sin(\lambda_j - \lambda_i) \tan Az_{ij}]\right\}_0$$

$$b_6 = \left\{\frac{\cos Az_{ij} \cos \phi_j}{IJ \cos v_{ij}}[\sin(\lambda_j - \lambda_i) + (\sin \phi_i \cos(\lambda_j - \lambda_i) - \cos \phi_i \tan \phi_j) \tan Az_{ij}]\right\}_0$$

١٠-٨-٣ معادلة الزاوية الرأسية

المعادلة الخطية لحساب الزاوية الرأسية بين نقطتين I, J تتكون من:

$$c_1 dn_i + c_2 de_i + c_3 du_i + c_4 dn_j + c_5 de_j + c_6 du_j = v_{ij} - v_o \qquad (10\text{-}31)$$

حيث:

v_o الزاوية الرأسية المحسوبة من المعادلة (١٠-٢٧)

vij الزاوية الرأسية المقاسة

$$c_1 = \left(\frac{\sin v_{ij} \cos Az_{ij}}{IJ}\right)_0$$

$$c_2 = \left(\frac{\sin v_{ij} \sin Az_{ij}}{IJ}\right)_0$$

$$c_3 = -\left(\frac{\cos v_{ij}}{IJ}\right)_0$$

$$c_4 = \left[\frac{-\cos \phi_i \sin \phi_j \cos(\lambda_j - \lambda_i) + \sin \phi_i \cos \phi_j + \sin v_{ij} \cos v_{ji} \cos Az_{ji}}{IJ \cos v_{ij}}\right]_0$$

$$c_5 = \left[\frac{-\cos \phi_i \sin(\lambda_j - \lambda_i) + \sin v_{ij} \cos v_{ji} \sin Az_{ji}}{IJ \cos v_{ij}}\right]_0$$

$$c_6 = \left[\frac{\sin v_{ij} \sin v_{ji} + \sin \phi_i \sin \phi_j + \cos \phi_i \cos \phi_j \cos(\lambda_j - \lambda_i)}{IJ \cos v_{ij}}\right]_0$$

١٠-٨-٤ معادلة الزاوية الأفقية

المعادلة الخطية لحساب الزاوية الأفقية بين النقاط b, i, f تتكون من:

$$
\begin{aligned}
&d_1 dn_b + d_2 de_b + d_3 du_b + d_4 dn_i + d_5 de_i + d_6 du_i + \\
&\qquad d_7 dn_f + d_8 de_f + d_9 du_f = \theta_{bif} - \theta_o \qquad (10\text{-}32)
\end{aligned}
$$

حيث:

θ_o الزاوية الأفقية المحسوبة من فرق انحرافين كلا منهما محسوب بالمعادلة (١٠-٢٦)

θ_{bif} الزاوية الأفقية المقاسة

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \left\{ \frac{\sin Az_{ib}}{IB \cos v_{ib}} \left[\cos(\phi_b - \phi_i) + \frac{\sin \phi_b \sin(\lambda_b - \lambda_i)}{\tan Az_{ib}} \right] \right\}_0 \\
d_2 &= -\left\{ \frac{\cos Az_{ib}}{IB \cos v_{ib}} [\cos(\lambda_b - \lambda_i) + \sin \phi_i \sin(\lambda_b - \lambda_i) \tan Az_{ib}] \right\}_0 \\
d_3 &= -\left\{ \frac{\cos Az_{ib} \cos \phi_b}{IB \cos v_{ib}} [\sin(\lambda_b - \lambda_i) + (\sin \phi_i \cos(\lambda_b - \lambda_i) - \cos \phi_i \tan \phi_b) \tan Az_{ib}] \right\}_0 \\
d_4 &= \left(\frac{\sin Az_{if}}{IF \cos v_{if}} - \frac{\sin Az_{ib}}{IB \cos v_{ib}} \right)_0 \\
d_5 &= \left(\frac{\cos Az_{ib}}{IB \cos v_{ib}} - \frac{\cos Az_{if}}{IF \cos v_{if}} \right)_0 \\
d_6 &= 0 \\
d_7 &= -\left\{ \frac{\sin Az_{if}}{IF \cos v_{if}} \left[\cos(\phi_f - \phi_i) + \frac{\sin \phi_f \sin(\lambda_f - \lambda_i)}{\tan Az_{if}} \right] \right\}_0 \\
d_8 &= \left\{ \frac{\cos Az_{if}}{IF \cos v_{if}} [\cos(\lambda_f - \lambda_i) + \sin \phi_i \sin(\lambda_f - \lambda_i) \tan Az_{if}] \right\}_0 \\
d_9 &= \left\{ \frac{\cos Az_{if} \cos \phi_f}{IF \cos v_{if}} [\sin(\lambda_f - \lambda_i) + (\sin \phi_i \cos(\lambda_f - \lambda_i) - \cos \phi_i \tan \phi_f) \tan Az_{if}] \right\}_0
\end{aligned}
$$

١٠-٨-٥ معادلة فرق المنسوب

المعادلة الأصلية غير الخطية لحساب منسوب H (الارتفاع الأرثومتري أو الارتفاع من منسوب متوسط سطح البحر MSL) من h ارتفاعها الجيوديسي geodetic or ellipsoidal height و N قيمة حيود الجيويد geoid undulation هي:

H = h - N

ومن ثم فلنقطتين يمكن كتابة معادلة فرق المنسوب كالتالي:

$\Delta H = \Delta h - \Delta N$

ومن ثم فأن المعادلة الخطية لفرق المنسوب بين نقطتين i, j تتكون من:

$$1du_j + 1du_i = \Delta H_{ij} - \Delta N_{ij} - \Delta h_{ij} \tag{10-33}$$

حيث:

ΔH فرق المنسوب المقاس
Δh فرق الارتفاع الجيوديسي
ΔN فرق حيود الجيويد

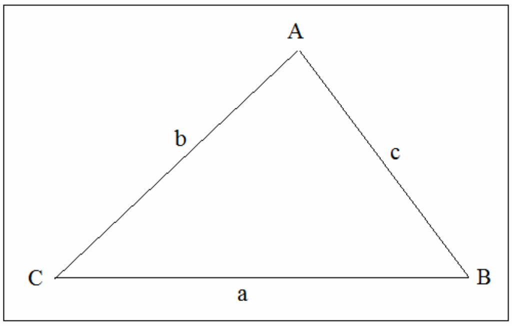
الفصل الحادي عشر

نظرية مجموع أقل المربعات

١١-١ مقدمة

تحتمل جميع الأرصاد و القياسات المساحية أخطاء (مهما كانت صغيرة) سواء أخطاء الراصد أو أخطاء الجهاز أو أخطاء عشوائية. أيضا فأن من المبادئ المساحية المستقرة أن يوجد ما نسميه الأرصاد الزائدة redundant observations، فعلي سبيل المثال نحن نجري خط الميزانية ذهابا و عودة مع أن أحدهما يكفي لحساب منسوب النقطة الجديدة من منسوب النقطة المعلومة. وهذه الأرصاد الزائدة تحقق لنا شروطا هندسية تسمح لنا بالتحقيق و اكتشاف الأخطاء، فالفرق بين خطي الميزانية (الذهاب و العودة) يجب أن يساوي صفرا ومجموع زوايا المثلث الداخلية يجب أن يساوي ١٨٠°. أي أن وجود أرصاد زائدة هام للغاية في جميع تطبيقات العمل المساحي. إلا أن وجود الأرصاد الزائدة يجعل عدد معادلات الرصد أكبر من عدد القيم المجهولة (المطلوب حسابها)، ومن الناحية الرياضية فأن هناك عدد من الحلول لهذه المعادلات وليس حلا واحدا متفردا unique solution. ومن ثم فلا بد من استخدام طريقة معينة لضبط الأرصاد والوصول إلي القيمة الأكثر احتمالا most probable values للكميات المجهولة.

ولشرح هذه النقطة أكثر فنأخذ المثال التالي حيث يراد حساب طول الضلع c في المثلث التالي المتوافر له عدة قياسات تشمل:



A = 68° 15' 17.1"
B = 65° 41' 33.7"
C = 46° 03' 13,4"
a = 936.161 m
b = 918.557 m

وحيث أن حساب الضلع c يتطلب معرفة طول ضلعين و زاوية واحدة أو طول ضلع واحد و زاويتين (أرجع للفصل الأول) فسيكون هناك عدد من الحلول كما في الجدول التالي:

الحل	القياسات المستخدمة	طول الضلع c
١	A B a	٧٢٥.٦٥١
٢	A C a	٧٢٥.٦٦٥
٣	A B b	٧٢٥.٦٧٠
٤	A C b	٧٢٥.٦٩١
٥	B C b	٧٢٥.٦٨٤
٦	A a b	٧٢٥.٦١٢
٧	B a b	٧٢٥.٧١٤
٨	C a b	٧٢٥.٦٧٧

وبالطبع فأن هذه الاختلافات في النتائج يعود لوجود أخطاء في القياسات، فبكل سهولة يمكن معرفة أن مجموع زوايا المثلث الثلاثة يبلغ ٢.٠٤" ٠٠' ١٨٠^{0}، وليس ١٨٠^{0} تماما. وهنا نتساءل: أي قيمة لطول الضلع c هي الأدق؟. ومن ثم تبرز أهمية ضبط الأرصاد بهدف الوصول للقيمة الأكثر احتمالا (القيمة الأدق) للكميات المطلوب حسابها.

توجد عدة طرق رياضية و إحصائية لضبط الأرصاد observation adjustment، إلا أن طريقة مجموع أقل المربعات Least Squares Adjustment (أو اختصارا LSA) تعد هي الأشهر و الأكثر تطبيقا في الهندسة المساحية. وتعتمد هذه الطريقة الرياضية علي تقليل مجموع مربعات الأخطاء إلي أقل حد ممكن (ومن هنا جاء أسمها):

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots\dots + v_n^2 = \min mum \qquad (11\text{-}1)$$

حيث v تمثل المتبقيات residuals أي الفروق بين القيم المرصودة و القيم الحقيقية (أو القيم الأكثر احتمالا)، و n يمثل عدد الأرصاد.

وفي حالة استخدام أوزان متعددة w_i لمجموعة الأرصاد فأن مبدأ نظرية مجموع أقل المربعات يصبح:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i v_i^2 = w_1 v_1^2 + w_2 v_2^2 + w_3 v_3^2 + \dots\dots + w_n v_n^2 = \min mum \qquad (11\text{-}2)$$

وهذا يعني أن قيم الأخطاء المحسوبة تكون هي الأكثر احتمالا أو الأقرب لقيم الأخطاء الحقيقية وبالتالي فأن استخدام هذه القيم في تصحيح القياسات و حساب قيم العناصر المجهولة يكون أقرب للحقيقة. كما أن من مميزات طريقة LSA أنها تقبل استخدام كافة الأرصاد دون النظر لأنواعها أو عددها (أي يمكن استخدام أرصاد طولية و زاوية ....الخ) في عملية ضبط واحدة. كما أن LSA مبنية علي أسس رياضية و إحصائية مما يجعلها طريقة صارمة و دقيقة rigorous سواء في عملية الضبط ذاتها أو في تحليل نتائج الضبط أيضا.

وتوجد طريقتين لتنفيذ ضبط لأرصاد باستخدام نظرية مجموع أقل المربعات وهما: (١) الضبط باستخدام معادلات الأرصاد observation equations ، (٢) الضبط باستخدام معادلات الاشتراطات condition equations.

١١-٢ طريقة الضبط بنظرية مجموع أقل المربعات باستخدام معادلات الأرصاد

كل رصده مساحية (مباشرة) تعطي معادلة تربطها مع القيمة المجهولة المطلوب حسابها (رصده غير مباشرة). وفي حالة كون المعادلة غير خطية، فيمكن باستخدام نظرية مجموعة مشتقات تايلور تحويلها إلي معادلة خطية كما سبق أن رأينا في الفصل السابق. أي أن أيه معادلات مساحية يمكن وضعها في الصورة التالية باستخدام جبر المصفوفات:

$$Ax = b + v \tag{11-3}$$

حيث:

x متجه للقيم المجهولة المطلوب حسابها vector of unknowns
b متجه الأرصاد vector of observations
A مصفوفة المعاملات matrix of coefficients
v متجه المتبقيات vector of residuals (الفروق بين القيم المرصودة و القيم الحقيقية).

ودون الدخول في التفاصيل الرياضية فأن حل نظام المعادلات (١١-٣) يكون كالتالي:

$$x = (A^T W A)^{-1} (A^T W b) \tag{11-4}$$

حيث:

W مصفوفة الوزن weight matrix (مصفوفة قطرية تتكون عناصر قطرها من الوزن المقابل لكل رصده من الأرصاد). وغالبا ما يتم اعتبار الوزن لكل رصده مساويا لمقلوب الانحراف المعياري لها. وعندما تكون هذه المصفوفة قطرية diagonal matrix فأن هذا ينطوي علي أننا اعتبرنا أن الأرصاد غير معتمدة علي بعضها البعض un-correlated وهذا افتراض مقبول و غير مؤثر عادة:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2^{-2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_3^{-2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^{-2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \text{etc.} \end{bmatrix}$$

حيث:

σ_i يمثل الانحراف المعياري للرصدة i.

أما في حالة الأوزان المتساوية (أي أن كل الأرصاد لها نفس الوزن ومن ثم فأم مصفوفة الوزن W ستساوي مصفوفة الوحدة I) فأن المعادلة ١١-٤ تصبح في صورتها المبسطة:

$$x = A^{-1} b$$

وهذا الحل المباشر (المعادلة ١١-٤ أو صورتها المبسطة) يكون للأرصاد ذات المعادلات الخطية مباشرة (مثل أرصاد خطوط الميزانية و أرصاد الجاذبية الأرضية و أرصاد مركبات الخطوط مثل مركبات GPS). أما لأرصاد المعادلات غير الخطية فأن طريقة الحل ستتطلب تصحيحات لقيم تقريبية وإعادة خطوط الحسابات بعدد من التكرارات بنفس الطريقة التي تناولناها في الفصل السابق. أي أن حل المعادلات غير الخطية سيكون:

$$\hat{x} = x_p + \delta x \qquad (11\text{-}5)$$

حيث:

$\hat{x}$ متجه القيم المضبوطة vector of adjusted values

x_p متجه القيم التقريبية vector of approximate values

δx متجه التصحيحات vector of corrections

يتم حساب المتبقيات residuals (بعد انتهاء عملية الضبط) كالتالي:

$$v = Ax - b \qquad (11\text{-}6)$$

ومن المفترض أن تكون قيمة حاصل قسمة مجموع مربعات المتبقيات sum of residuals squares علي الخطأ المعياري قبل الضبط apriori standard error مساويا للواحد الصحيح. وهذا سيكون صحيحا فقط في حالة أن الأوزان المستخدمة لكل رصده تم تحديدها بدقة وعناية (تتناسب مع الدقة الحقيقية للأرصاد) وأيضا عدم وجود أية أغلاط أو أخطاء كبيرة gross errors في مجموعة الأرصاد ذاتها. لذلك فمن الاختبارات الإحصائية التي تقدمها طريقة مجموع أقل المربعات حساب قيمة "الخطأ المعياري لرصده لها وحدة وزن واحدة standard error of an observation of unit weight" كالتالي:

$$\sigma_o^2 = \sum w_i v_i \big/ m - n \qquad (11\text{-}7)$$

حيث:

σ_o الخطأ المعياري لرصده لها وحدة وزن واحدة (ويسمي أيضا المعامل المحسوب للتباين estimated variance factor).

w_i, v_i الوزن و الخطأ المتبقي لكل رصده

m عدد القيم المجهولة number of unknowns

n عدد الأرصاد number of observations

m-n درجة الحرية أو عدد الأرصاد الزائدة degree of freedom

فإذا كانت قيمة σ_o^2 الناتجة أكبر من ١، فأن هذا يدل علي احتمال وجود أغلاط أو أخطاء كبيرة أو احتمال أن الأوزان المستخدمة غير متناسبة مع جودة الأرصاد ذاتها. وعادة ما يتم اختبار قيمة $\sum w_i v_i^2$ باستخدام جداول الاختبار الإحصائي "مربع كاي χ^2" عند درجة الحرية

المطلوبة (أي قيمة m-n) عادة عند مستوي خطأ يساوي ٥% (أو ٠.٠٥) كما في الجدول التالي. فان كانت قيمة $\sum w_i v_i^2$ أقل من قيمة الجدول (عند الصف m-n والعمود ٠.٠٥) فهذا يدل علي عدم وجود أغلاط في الأرصاد.

Degrees of freedom (m−n) درجة الحرية	Probability الاحتمال			
	0.10	0.05	0.02	0.01
1	1.64	1.96	2.33	2.58
2	1.52	1.73	1.98	2.15
3	1.44	1.61	1.81	1.94
4	1.39	1.54	1.71	1.82
5	1.36	1.49	1.64	1.74
6	1.33	1.45	1.58	1.67
8	1.29	1.39	1.51	1.58
10	1.26	1.35	1.45	1.52
12	1.24	1.32	1.42	1.48
15	1.22	1.29	1.37	1.43
20	1.19	1.25	1.32	1.37
40	1.14	1.18	1.23	1.26
100	1.09	1.12	1.15	1.17

ولحساب مصفوفة التباين-الترابط للقيم المجهولة variance-covariance matrix of unknowns يتم استخدام المعادلة التالية:

$$\sigma_{(x)} = (A^T WA)^{-1} \qquad (11\text{-}8)$$

وتكون هذه المصفوفة متماثلة symmetrical matrix (أي أن عناصر ما فوق القطر تتماثل مع عناصر ما تحت القطر)، وتكون عناصر القطر ذاته هي تباين variance للقيم المضبوطة ومن ثم يمكن حساب الانحراف المعياري لأي عنصر منهم بأخذ الجذر التربيعي لعنصر القطر المناظر له.

$$\sigma_{(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \cdots \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \cdots \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_{34} & \cdots \\ & & & \sigma_4^2 & \cdots \\ \textit{symmetrical} & & & & \end{bmatrix}$$

أيضا يمكن اختبار مصداقية الأرصاد observations reliability من خلال حساب مصفوفة التباين-الترابط للأرصاد المضبوطة variance-covariance matrix of adjusted observations باستخدام المعادلة التالية:

$$\sigma_{(l)} = A(A^T WA)^{-1} A^T \qquad (11\text{-}9)$$

ومن هذه المصفوفة يمكن حساب الانحراف المعياري لأي رصده مضبوطة بأخذ الجذر التربيعي لعنصر القطر المناظر للرصدة المطلوبة. ثم يتم حساب قيمة حاصل قسمة الانحراف

المعياري للرصدة بعد الضبط علي الانحراف المعياري للرصدة الأصلية (أي قيمة $\sigma_{(l)}$ / $\sigma_{(b)}$)، ونقارنه بقيمة الاختبار الإحصائي F. أو يمكن تبسيط هذه الخطوة الإحصائية كالتالي: إذا تحققت المعادلة:

$$\sigma_{(l)} / \sigma_{(b)} < 0.8$$

فأن هذا يدل علي مصداقية هذه الرصدة.

علما بأن الأرصاد المضبوطة يمكن حسابها بإضافة قيم المتبقيات إلي قيم الأرصاد الأصلية:

$$l = b + v \qquad (11\text{-}10)$$

والفصول القادمة تقدم بصورة تفصيلية تطبيقات عملية في مجالات الهندسة المساحية لتنفيذ طريقة مجموع أقل المربعات في ضبط الأرصاد و الشبكات المساحية و الجيوديسية.

١١-٣ طريقة الضبط بنظرية مجموع أقل المربعات باستخدام معادلات الاشتراطات

لم تعد طريقة للاشتراطات أو الشروط conditional or parametric least-squares adjustment مطبقة كثيرا في الضبط بمجموع أقل المربعات في الوقت الحالي في المساحة لأنها تتطلب جهدا أكبر في تكوين معادلات الشروط بينما يمكن تكوين معادلات الأرصاد (الطريقة السابقة) بصورة أسهل و أسرع.

في طريقة معادلات الأرصاد كان يمكن التعبير عن كل رصده بمعادلة رياضية تربطها مع القيم المجهولة المطلوب حسابها، وكان الحل يبدأ بحساب قيمة المجاهيل (المعادلة ١١-٤) ثم التعويض لاحقا لحساب قيم الأرصاد المضبوطة(المعادلة ١١-١٠). أما في طريقة الاشتراطات فأن المعادلات تشمل الأرصاد فقط، ويتكون الحل من الحصول علي قيم الأرصاد المضبوطة أولا والتي منها يمكن حساب قيم العناصر المجهولة.

باستخدام المصفوفات سنرمز للأرصاد الأصلية بالرمز l وللأرصاد المضبوطة بالرمز L، وتكون لدينا دالة أو معادلة الشرط التالية:

$$F(L) = 0 \qquad (11\text{-}11)$$

فعلي سبيل المثال فأن مجموع الزوايا الداخلية (المضبوطة) لمثلث يجب أن تساوي ١٨٠°، فتكون هذه معادلة الشرط المطلوبة.

فإذا كان لدينا عدد n من الأرصاد وعدد m من القيم المجهولة فأن عدد معادلات الاشتراطات في المعادلة السابقة سيساوي $n_e = n\text{-}m$ أي عدد الأرصاد الزائدة أو درجات الحرية. لكن يجب أن تكون هذه المعادلات مستقلة independent ولا تعتمد إحداهم علي الأخرى، وهذا من أهم شروط هذه الطريقة من طرق الضبط.

ومن ثم فأن مصفوفة التفاضل الأول للمعادلات (١١-١١) بالنسبة للأرصاد ستكون علي الشكل التالي:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{n_e},\mathbf{n}} = \frac{\partial F}{\partial \ell} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \ell_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \ell_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \ell_3} & \cdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial \ell_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \ell_2} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial \ell_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ومن ثم فأن معادلة نموذج الاشتراطات ستكون في الصورة التالية:

$$Bv - b = 0$$

حيث:

v متجه المتبقيات residuals

b متجه خطأ القفل misclose vector أي ناتج تطبيق معادلات الاشتراطات باستخدام الأرصاد الأصلية (بعكس الإشارة):

$$b = -F(l)$$

وتكون معادلات الحل كالآتي:

المتبقيات residuals :

$$v = QB^T (BQB^T)^{-1} b$$

المعامل المحسوب للتباين estimated variance factor :

$$VF = v^T Pv / n_c$$

حيث:

n_c عدد الشروط number of conditions

الأرصاد المضبوطة adjusted observations :

$$L = l + v$$

مصفوفة التباين-الترابط للأرصاد المضبوطة variance-covariance matrix of adjusted observations :

$$Q_L = Q - QB^T (BQB^T)^{-1} BQ$$

حيث:

$Q_{n,n}$ مصفوفة التباين-الترابط للأرصاد الأصلية variance-covariance matrix of observations.

مصفوفة التباين-الترابط للمتبقيات variance-covariance matrix of residuals :

$$Q_v = QB^T (BQB^T)^{-1} BQ$$

١١-٤ طرق أخرى لضبط الأرصاد المساحية و الجيوديسية

توجد طرق أخري لتطبيق مبدأ مجموع أقل المربعات لضبط الأرصاد بخلاف الطريقتين السابقتين، إلا أن لكل طريقة مميزات تجعلها مناسبة لنوع أو أنواع معينة من الأرصاد خاصة القياسات الجيوديسية مثل أرصاد الجيوديسيا الطبيعية أو الفيزيقية physical geodesy.

تعتمد طريقة انتظام أقل المربعات least-squares collocation (أو اختصارا LSC) علي مبدأ أن الأرصاد تتكون من جزء منتظم systematic part وجزء عشوائي (أخطاء الرصد العشوائية random errors). وتجدر الإشارة إلي أن مبدأ الضبط بمجموع أقل المربعات LSA يعتمد علي عدم وجود أية أخطاء منتظمة في الأرصاد). فبدلا من المعادلة الأصلية (١١-٣) فأن معادلة نموذج LSC ستكون علي النحو التالي:

$$Ax = b + v + s \qquad (11\text{-}12)$$

حيث:

s متجه الإشارات vector of signals الذي يعبر عن العناصر المنتظمة systematic parameters .

ومن أهم مميزات طريقة انتظام أقل المربعات LSC أنها تمكننا من حساب قيم العناصر المجهولة x وأيضا استخدام قيم s في الاستنباط interpolation وكذلك التنبؤ prediction، أي أن هذه الطريقة ليست فقط لضبط الأرصاد بل أيضا للتنبؤ و الاستنباط وهذا أهم مميزاتها مقارنة بطريقة مجموع أقل المربعات العادية LSA. ومن ثم فأن استخدامات طريقة LSC عادة ما يكون في التطبيقات الجيوديسية مثل أرصاد الجاذبية الأرضية (حيث الأرصاد الأصلية هي قراءة الجهاز بينما الإشارات s هي فرق الجاذبية Δg ، أي أننا نضبط أرصاد قراءة الجهاز ذاته وفي نفس الوقت نحول القراءات إلي فروق جاذبية) وأرصاد الأقمار الصناعية و تحويل المراجع (لمزيد من التفاصيل عن طريقة LSC يمكن الرجوع إلي Moritz 1972).

وفي الفصول القادمة سنقتصر فقط علي تطبيق طريقة مجموع أقل المربعات LSA في عدد من مجالات الهندسة المساحية.

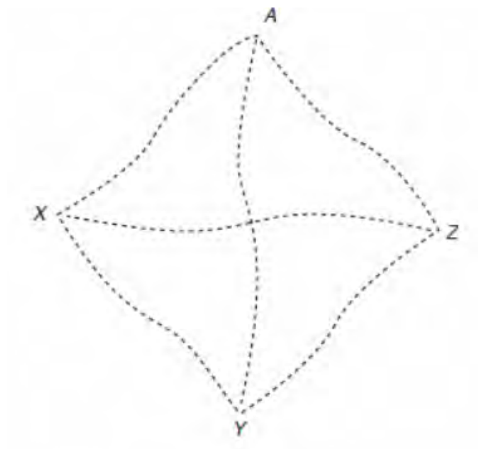
الفصل الثاني عشر

ضبط أرصاد الميزانية

يقدم هذا الفصل أمثلة تفصيلية لتطبيق طريقة مجموع أقل المربعات Least-Squares Adjustment لضبط شبكة (مجموعة خطوط) ميزانيات.

١٢-١ المثال الأول (طريقة معادلات الأرصاد)

في الشكل التالي تعد نقطة A روبير (نقطة معلومة المنسوب) تم منها عمل ٦ خطوط ميزانية لحساب منسوب النقاط الثلاثة X, Y, Z . ونرمز لمنسوب الروبير بالرمز h_A بينما الخطوط الستة المرصودة ستكون: $\Delta h_{AX}, \Delta h_{AY}, \Delta h_{AZ}, \Delta h_{YX}, \Delta h_{ZX}, \Delta h_{ZY}$ كالتالي:



إذن لدينا:

n = عدد الأرصاد = عدد خطوط الميزانية = ٦
m = عدد القيم المجهولة = عدد النقاط المطلوب حساب منسوبها = ٣
m-n = عدد الأرصاد الزائدة = عدد درجات الحرية = ٦-٣ = ٣

الآن سنكون معادلات الرصد (أي كل رصده تعطي معادلة تشمل القيم المجهولة المطلوب حسابها وهي في هذا المثال مناسيب النقاط الثلاثة (X, Y, Z كالتالي: لنأخذ كمثال خط الميزانية من نقطة A إلي نقطة X حيث فرق الارتفاع المرصود Δh_{AX} هو الفرق بين منسوب X ومنسوب A، لكن هذه الرصدة ليست دقيقة تماما بل تحتمل قيمة متبقية residual لنرمز لها بالرمز v_1 ، أي أن:

$$h_X - h_A = \Delta h_{AX} + v_1$$

وبالمثل يمكن تكوين ٥ معادلات رصد للأرصاد (فروق المناسيب) الأخرى كالتالي:

$$h_Y - h_A = \Delta h_{AY} + v_2$$
$$h_Z - h_A = \Delta h_{AZ} + v_3$$
$$h_X - h_Y = \Delta h_{YX} + v_4$$

$$h_X - h_Z = \Delta h_{ZX} + v_5$$
$$h_Y - h_Z = \Delta h_{ZY} + v_6$$

وحيث أن قيمة منسوب النقطة A معلوما فيمكننا إعادة صياغة المعادلات السابقة بحيث تشمل فقط القيم المجهولة الثلاثة (مناسيب النقاط الثلاثة المجهولة) كالتالي:

$$h_X = h_A + \Delta h_{AX} + v_1$$
$$h_Y = h_A + \Delta h_{AY} + v_2$$
$$h_Z = h_A + \Delta h_{AZ} + v_3$$
$$h_X - h_Y = \Delta h_{YX} + v_4$$
$$h_X - h_Z = \Delta h_{ZX} + v_5$$
$$h_Y - h_Z = \Delta h_{ZY} + v_6$$

ثم نضع هذه المعادلات الستة في صورة مصفوفات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_A + \Delta h_{AX} \\ h_A + \Delta h_{AY} \\ h_A + \Delta h_{AZ} \\ \Delta h_{YX} \\ \Delta h_{ZX} \\ \Delta h_{ZY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

أي أنها الآن أصبحت في صورة:

$$Ax = b + v$$

حيث: $A_{6,3}$ مصفوفة المعاملات، $x_{3,1}$ متجه المجاهيل، $b_{6,1}$ متجه الأرصاد، $v_{6,1}$ متجه المتبقيات.

الجدول التالي يقدم قيم الأرصاد (فروق المنسوب لكل خط ميزانية) بالإضافة لطول الخط بالكيلومتر، علما بأن منسوب الروبير المعلوم A يساوي ١٠٠.٠ متر:

الخط	فرق الارتفاع المرصود	طول الخط
AX	12.483 m	5 km
AY	48.351 m	10 km
AZ	5.492 m	7 km
XY	35.883 m	7 km
XZ	−7.093 m	12 km
YZ	−42.956 m	9 km

عادة في الميزانيات فأننا نعتبر أن الخطأ المعياري standard error لأي خط ميزانية يساوي (تختلف هذه المعادلة من دولة لآخري طبقا لمواصفات كل دولة):

$$\sigma_{\Delta'} = 0.017\sqrt{K}$$

حيث: K هو طول خط الميزانية بالكيلومتر.

الآن سنبدأ بالتعويض بالأرقام في المثال الحالي:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_A + \Delta h_{AX} \\ h_A + \Delta h_{AY} \\ h_A + \Delta h_{AZ} \\ \Delta h_{YX} \\ \Delta h_{ZX} \\ \Delta h_{ZY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.483 \text{ m} \\ 148.351 \text{ m} \\ 105.492 \text{ m} \\ 35.833 \text{ m} \\ -7.093 \text{ m} \\ -42.956 \text{ m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

ثم سنحسب قيمة الخطأ المعياري لكل خط، ومن ثم حساب الوزن لكل خط (أي كل رصده) حيث الوزن يساوي مقلوب مربع الخطأ المعياري كالتالي:

الخط	الطول (كم)	الخطأ المعياري للرصدة (متر)	الوزن (١/متر مربع)
AX	5	0.038	692
AY	10	0.054	348
AZ	7	0.045	496
XY	7	0.045	496
XZ	12	0.059	288
YZ	9	0.051	384

وبالتالي فأن مصفوفة الوزن $W_{6,6}$ ستكون على الشكل التالي:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 692 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 348 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 496 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 496 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384 \end{bmatrix}$$

وحيث أن معادلات الرصد معادلات خطية (لا تحتاج قيم تقريبية للمجاهيل ولا تحتاج عملية تكرار) فأننا الآن سنقوم مباشرة بحساب القيم المجهولة باستخدام المعادلة (١١-٤) كالآتي:

$$x = (A^T WA)^{-1}(A^T Wb)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 692 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 348 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 496 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 496 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 692 & 0 & 0 & -496 & -288 & 0 \\ 0 & 348 & 0 & 496 & 0 & -384 \\ 0 & 0 & 496 & 0 & 288 & 384 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{WA} = \begin{bmatrix} 692 & 0 & 0 & -496 & -288 & 0 \\ 0 & 348 & 0 & 496 & 0 & -384 \\ 0 & 0 & 496 & 0 & 288 & 384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1476 & -496 & -288 \\ -496 & 1228 & -384 \\ -288 & -384 & 1168 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{WA})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000918866 & 0.000492633 & 0.000388531 \\ 0.000492633 & 0.001171764 & 0.000506708 \\ 0.000388531 & 0.000506708 & 0.001118559 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Wb} = \begin{bmatrix} 692 & 0 & 0 & -496 & -288 & 0 \\ 0 & 348 & 0 & 496 & 0 & -384 \\ 0 & 0 & 496 & 0 & 288 & 384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 112.483 \\ 148.351 \\ 105.492 \\ 35.883 \\ -7.093 \\ -42.956 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62083.1 \\ 85919.2 \\ 33786.1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فأن الحل النهائي يكون كالتالي:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{WA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Wb}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.000918866 & 0.000492633 & 0.000388531 \\ 0.000492633 & 0.001171764 & 0.000506708 \\ 0.000388531 & 0.000506708 & 0.001118559 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62083.1 \\ 85919.2 \\ 33786.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.500\text{ m} \\ 148.381\text{ m} \\ 105.449\text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_X \\ h_Y \\ h_Z \end{bmatrix}$$

أي أن منسوب نقطة X يساوي ١١٢.٥٠٠ متر ومنسوب نقطة Y يساوي ١٤٨.٣٨١ متر ومنسوب نقطة Z يساوي ١٠٥.٤٤٩ متر.

هذا عن مناسيب النقاط المرصودة، لمت ماذا عن دقة هذه المناسيب الناتجة من عملية الضبط؟ سنبدأ التحليل بحساب قيم المتبقيات residuals كالتالي (المعادلة ١١-٦):

$$v = Ax - b$$

v_1 = + 0.016 m
v_2 = + 0.030 m
v_3 = - 0.044 m
v_4 = - 0.001 m
v_5 = + 0.042 m
v_6 = + 0.023 m

وعندما نقارن هذه القيم بقيمة الخطأ المعياري للأرصاد الأصلية قبل الضبط apriori standard errors لا يمكننا تأكيد أو نفي وجود أغلاط أو أخطاء كبيرة في الأرصاد، لكن هذا بمجرد النظر فقط ولا بد من التأكد من هذه النتيجة علميا من خلال الاختبار الإحصائي البسيط بمقارنة قيمة σ_o^2 (مربع الخطأ المعياري لرصده لها وحدة وزن واحدة) وهل هي أقل من ٠.٨ أم لا:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum w_i v_i^2}{m-n} = 0.72$$

وحيث أن القيمة المحسوبة أقل من ٠.٨ فهذا يدل علي عدم وجود أغلاط وأن الأوزان المستخدمة كانت مناسبة لجودة الأرصاد.

أما مصفوفة التباين-الترابط للقيم المضبوطة فيمكن حسابها كالتالي (المعادلة ١١-٨):

$$\sigma_{(x)} = (A^T WA)^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{WA})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000918866 & 0.000492633 & 0.000388531 \\ 0.000492633 & 0.001171764 & 0.000506708 \\ 0.000388531 & 0.000506708 & 0.001118559 \end{bmatrix}$$

ومن ثم يمكننا حساب الخطأ المعياري لكل منسوب من المناسيب الثلاثة (للنقاط X, Y, Z) من خلال أخذ الجذر التربيعي لعناصر قطر هذه المصفوفة فينتج لنا:

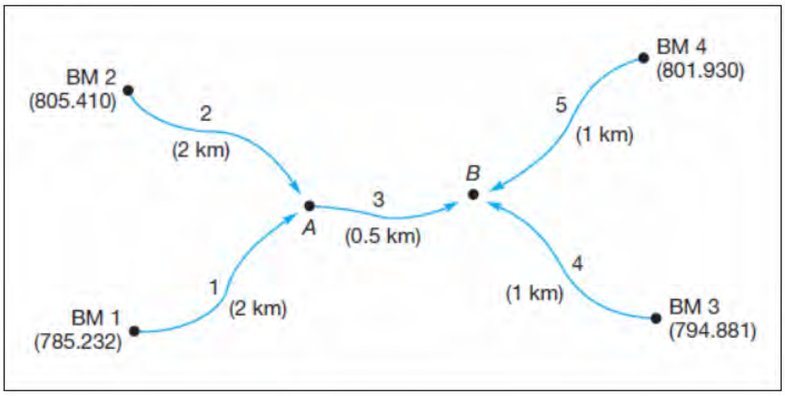
σ_{hX} = 0.0303 m
σ_{hY} = 0.0342 m
σ_{hZ} = 0.0334 m

أي أن النتائج النهائية لعملية ضبط مجموع أقل المربعات تتكون من:

- منسوب نقطة X يساوي ١١٢.٥٠٠±٠.٠٣٠ متر
- منسوب نقطة Y يساوي ١٤٨.٣٨١±٠.٠٣٤ متر
- منسوب نقطة Z يساوي ١٠٥.٤٤٩±٠.٠٣٣ متر

١٢-٢ المثال الثانى (طريقة معادلات الأرصاد)

يمثل الشكل التالي شبكة من خمسة خطوط ميزانيات تمت بدءا من أربعة روبيرات (معلومة المنسوب) لتحديد منسوب النقطتين الجديدتين A, B، ونري في الشكل قيم منسوب كل روبير BM وطول كل خط ميزانية بالكيلومتر. فإذا كانت أرصاد فروق المناسيب للخطوط الخمسة بالترتيب هي: +١٠.٩٩٧ ، -٩.١٦٩ ، +٣.٥٣٢ ، +٤.٨٥٨ ، -٢.٢٠٢ متر فقم بضبط هذه الأرصاد وحساب منسوبي A,B.



معادلات الرصد يتكون:

$$
\begin{aligned}
A &= BM1 + 10.997 + v_1 \\
A &= BM2 - 9.169 + v_2 \\
B &= A + 3.532 + v_3 \\
B &= BM3 + 4.858 + v_4 \\
B &= BM4 - 2.202 + v_5
\end{aligned}
$$

وبالتعويض بقيم مناسيب الروبيرات المعلومة تصبح المعادلات:

$$
\begin{aligned}
A &= 796.229 + v_1 \\
A &= 796.241 + v_2 \\
-A + B &= 3.532 + v_3 \\
B &= 799.739 + v_4 \\
B &= 799.728 + v_5
\end{aligned}
$$

وبذلك فأن مصفوفات معادلات الأرصاد ستكون كالتالي:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
x = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad
b = \begin{bmatrix} 796.229 \\ 796.241 \\ 3.532 \\ 799.739 \\ 799.728 \end{bmatrix} \quad
v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}
$$

من الطرق الشائعة في ضبط شبكات الميزانية أن نعتبر وزن كل رصده (كل خط ميزانية) مساويا لمقلوب طول الخط بالكيلومتر حيث أنه كلما زاد طول الخط كلما كان متوقعا زيادة أخطاء الرصد وبالتالي كلما كان الخط أقل وزنا. ومن ثم فأن مصفوفة الوزن ستكون:

$$W = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فأن خطوات الحل ستكون كالتالي:

$$A^T W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A^T W A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^T W A)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T W \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 796.229 \\ 796.241 \\ 3.532 \\ 799.739 \\ 799.728 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 789.171 \\ 1606.531 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W \mathrm{b} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 789.171 \\ 1606.531 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 796.218 \\ 799.742 \end{bmatrix}$$

أي أن المنسوب المضبوط للنقطة A يساوي ٧٩٦.٢١٨ متر والمنسوب المضبوط للنقطة B يساوي ٧٩٩.٧٤٢ متر.

والآن يمكننا حساب المتبقيات residuals ثم الخطأ المعياري للقيم المضبوطة كالتالي:

$$\mathrm{v} = A\mathrm{x} - \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 796.218 \\ 799.742 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 796.229 \\ 796.241 \\ 3.532 \\ 799.739 \\ 799.728 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.011 \\ -0.023 \\ -0.008 \\ 0.003 \\ 0.014 \end{bmatrix}$$

$$v^T W v = [-0.011 \quad -0.023 \quad -0.008 \quad 0.003 \quad 0.014] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.011 \\ -0.023 \\ -0.008 \\ 0.003 \\ 0.014 \end{bmatrix} = [0.00066]$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{0.00066}{5-2}} = \pm 0.015 \text{ m}$$

$$\sigma_A = \pm 0.015\sqrt{\frac{4}{8}} = \pm 0.010 \text{ m}$$

$$\sigma_B = \pm 0.015\sqrt{\frac{3}{8}} = \pm 0.009 \text{ m}$$

أي أن النتائج النهائية لعملية ضبط مجموع أقل المربعات تتكون من:

- منسوب نقطة A يساوي ٧٩٦.٢١٨ ± ٠.٠١٠ متر
- منسوب نقطة B يساوي ٧٩٩.٧٤٢ ± ٠.٠٠٩ متر

أما الأرصاد المضبوطة و مصفوفة التباين-الترابط لها variance-covariance matrix of adjusted observations فيمكن حسابها من المعادلة (١١-٩ و ١١-١٠) كالتالي:

$$l = b + v$$

$$\sigma_{(l)} = A(A^T W A)^{-1} A^T$$

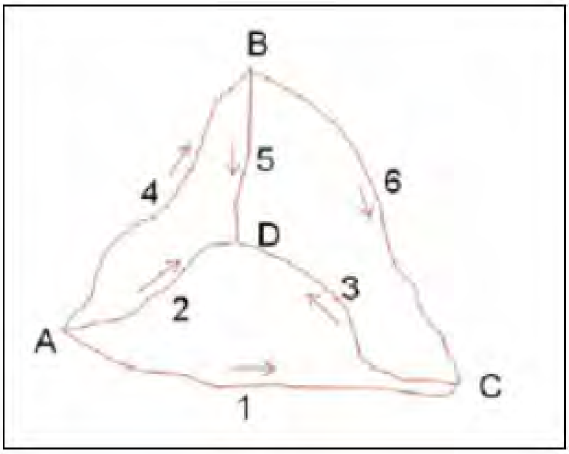
$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

وبحساب الجذر التربيعي لعناصر قطر هذه المصفوفة يمكننا الحصول علي قيم الأرصاد المضبوطة و الخطأ المعياري لها كالتالي:

من	الي	فرق المنسوب المرصود	المتبقيات	فرق المنسوب المضبوط	الخطأ المعياري
From	To	obs.ΔH	v	Adj.ΔH	σ
BM1	A	10.997	-0.011	10.986	±0.010
BM2	A	-9.169	-0.023	-9.192	±0.010
A	B	3.532	-0.008	3.524	±0.009
BM3	B	4.858	0.003	4.861	±0.009
BM4	B	-2.202	0.014	-2.188	±0.009

١٢-٣ المثال الثالث (طريقة معادلات الاشتراطات)

يمثل الشكل التالي حلقة مكونة من ٦ خطوط ميزانية لثلاثة نقاط مجهولةB, C, D بينما نقطة A روبير معلوم المنسوب يبلغ ١٠٠ متر:



ويمثل الجدول التالي قيم فروق المناسيب المرصودة ΔH وأيضا مربع الخطأ المعياري s^2 لكل خط:

Level line	ΔH (m)	s^2 (cm^2)
1	6.16	4
2	12.57	2
3	6.41	2
4	1.09	4
5	11.58	2
6	5.07	4

سنبدأ في تكوين معادلات الاشتراطات بحيث أن كل حلقة مغلقة من خطوط الميزانية يجب أن يكون مجموع ΔH لها يساوي الصفر، وذلك للحلقات ABD, BCD, ADC وللحلقة الخارجية ABC كالتالي:

$$\Delta H_{AB} + \Delta H_{BD} + \Delta H_{AD} = 0$$
$$\Delta H_{BC} + \Delta H_{CD} + \Delta H_{BD} = 0$$
$$\Delta H_{AD} + \Delta H_{CD} + \Delta H_{AC} = 0$$
$$\Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta H_{AC} = 0$$

وحيث أن عدد الأرصاد n = ٦ وعدد المجاهيل m = ٣ فنحن نحتاج معادلات اشتراطات مستقلة independent يبلغ عددها n-m = ٦ - ٣ = ٣ معادلات. وبالفحص يتبين لنا أن المعادلة الرابعة السابقة لا تعد معادلة مستقلة حيث أنها ما هي إلا مجموع المعادلات الثلاثة السابقين. إذن سنختار أول ٣ معادلات اشتراطات فقط و سنبدأ التعامل معهم ونضعهم في صورة معادلة نموذج الاشتراطات كالتالي:

$$Bv - b = 0$$

	b
$\Delta H_{AB} + \Delta H_{BD} + \Delta H_{AD} = 0$	-10
$\Delta H_{BC} + \Delta H_{CD} + \Delta H_{BD} = 0$	10
$\Delta H_{AD} + \Delta H_{CD} + \Delta H_{AC} = 0$	0.0

وتكون مصفوفة التفاضل الأول (المعاملات) ومصفوفة التباين للأرصاد الأصلية كالتالي:

$$B = \frac{\partial f}{\partial \ell} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ومن ثم فأن متجه المتبقيات residuals سيكون:

$$v = QB^T (BQB^T)^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وتكون الأرصاد المضبوطة كالتالي:

The adjusted observations are $\ell + v$:

1	ΔH_{AC}	6.16
2	ΔH_{AD}	12.59
3	ΔH_{CD}	6.43
4	ΔH_{AB}	1.05
5	ΔH_{BD}	11.54
6	ΔH_{BC}	5.11

وأيضا نحصل علي مصفوفة التباين-الترابط للأرصاد المضبوطة وقيم الخطأ المعياري للأرصاد S_L (الجذر التربيعي لعناصر قطر هذه المصفوفة) كالتالي:

$$Q_L = Q - QB^T (BQB^T)^{-1} BQ$$

$$\begin{pmatrix} 1.60 & 0.80 & -0.80 & 0.80 & 0.00 & 0.80 \\ 0.80 & 1.20 & 0.40 & 0.80 & 0.40 & 0.00 \\ -0.80 & 0.40 & 1.20 & 0.00 & 0.40 & -0.80 \\ 0.80 & 0.80 & 0.00 & 1.60 & -0.80 & -0.80 \\ 0.00 & 0.40 & 0.40 & -0.80 & 1.20 & 0.80 \\ 0.80 & 0.00 & -0.80 & -0.80 & 0.80 & 1.60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} s_L \\ 1.26 \\ 1.10 \\ 1.10 \\ 1.26 \\ 1.10 \\ 1.26 \end{array}$$

وباستخدام الأرصاد المضبوطة يمكن حساب قيم العناصر المجهولة (مناسيب النقاط الثلاثة) كالتالي:

$H_B = H_A + \Delta H_{AB} = 100 + 1.05 = 101.05$ m
$H_C = H_A + \Delta H_{AC} = 100 + 6.16 = 106.16$ m
$H_D = H_A + \Delta H_{AD} = 100 + 12.59 = 112.59$ m

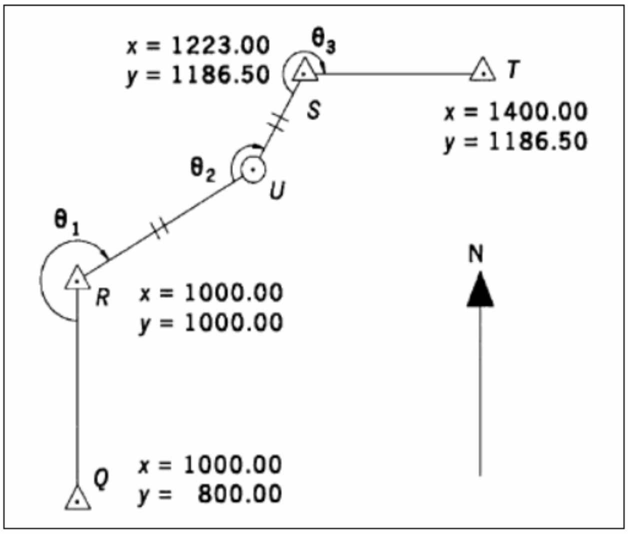
الفصل الثالث عشر

ضبط أرصاد الترافرس

يقدم هذا الفصل أمثلة تفصيلية لتطبيق طريقة مجموع أقل المربعات Least-Squares Adjustment لضبط الترافرسات وتطبيقات التقاطع الأمامي و التقاطع الخلفي.

١٣-١ مثال لضبط الترافرس الموصل

يمثل الشكل التالي نموذجا بسيطا لترافرس موصل يصل بين النقطتين المعلومتين الإحداثيات R, Q والنقطتين المعلومتين الإحداثيات S, T للوصول لإحداثيات النقطة المجهولة U، وكانت الأرصاد الخمسة المقاسة لهذا الترافرس كما في الجدول التالي:



Distance (ft)	Angle
$RU = 200.00 \pm 0.05$	$\theta_1 = 240°00' \pm 30''$
$US = 100.00 \pm 0.08$	$\theta_2 = 150°00' \pm 30''$
	$\theta_3 = 240°01' \pm 30''$

نبدأ الحل بحساب الإحداثيات التقريبية للنقطة المجهولة U كالتالي:

$X_{uo} = 1000.00 + 200.00 \sin(60^o) = 1173.20$ m
$Y_{uo} = 1000.00 + 200.00 \cos(60^o) = 1100.00$ m

أي أن متجه المجاهيل $X_{2,1}$ سيتكون من عنصرين فقط وهما التصحيحات dX_u, dY_u للإحداثيات التقريبية لهذه النقطة:.

$$X = \begin{bmatrix} dx_u \\ dy_u \end{bmatrix}$$

أما متجه الأرصاد $b_{5,1}$ فسيكون الفرق بين القيم المرصودة للأرصاد الخمسة و القيم المحسوبة لها (باستخدام القيم التقريبية للمجاهيل) كالتالي:

$$b = \begin{bmatrix} b_{l_{RU}} \\ b_{l_{US}} \\ b_{\theta_1} \\ b_{\theta_2} \\ b_{\theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.00\ \text{ft} - 200.00\ \text{ft} \\ 100.00\ \text{ft} - 99.81\ \text{ft} \\ 240°00'00'' - 240°00'00'' \\ 150°00'00'' - 149°55'51'' \\ 240°01'00'' - 240°04'12'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00\ \text{m} \\ 0.019\ \text{m} \\ 0'' \\ 249'' \\ -192'' \end{bmatrix}$$

وحيث أن المعادلات غير خطية فسنقوم بتكوين مصفوفة جاكوب $J_{5,2}$ (التفاضل الأول لكل معادلة رصد كما في الفصل العاشر) كالتالي:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1173.20 - 1000.00}{200.00} & \frac{1100.00 - 1000.00}{200.00} \\ \frac{1173.20 - 1223.00}{99.81} & \frac{1100.00 - 1186.50}{99.81} \\ \frac{1100.00 - 1000.00}{200.00^2}\rho & \frac{1000.00 - 1173.20}{200.00^2}\rho \\ \left(\frac{1000.00 - 1100.00}{200.00^2} - \frac{1186.50 - 1100.00}{99.81^2}\right)\rho & \left(\frac{1173.20 - 1000.00}{200.00^2} - \frac{1173.20 - 1223.00}{99.81^2}\right)\rho \\ \frac{1186.50 - 1100.00}{99.81^2}\rho & \frac{1173.50 - 1223.00}{99.81^2}\rho \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.500 \\ -0.499 & -0.867 \\ 515.7 & -893.2 \\ -2306.6 & 1924.2 \\ 1709.9 & -1031.1 \end{bmatrix}$$

ثم نكون مصفوفة الوزن $W_{5,5}$ حيث وزن أي رصده يساوي مقلوب مربع الخطأ المعياري لها كالتالي:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.05^2} & & & & \text{(zeros)} \\ & \frac{1}{0.08^2} & & & \\ & & \frac{1}{30^2} & & \\ & & & \frac{1}{30^2} & \\ \text{(zeros)} & & & & \frac{1}{30^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400.00 & & & & \text{(zeros)} \\ & 156.2 & & & \\ & & 0.0011 & & \\ & & & 0.0011 & \\ \text{(zeros)} & & & & 0.0011 \end{bmatrix}$$

الآن نبدأ التكرار الأول لحل معادلة المصفوفات :

$$X = (J^TWJ)^{-1}(J^TWb)$$

ونحصل علي:

$$J^T W J = \begin{bmatrix} 10093.552221 & -7254.153057 \\ -7254.153057 & 6407.367420 \end{bmatrix}$$

$$(J^T W J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000532 & 0.000602 \\ 0.000602 & 0.000838 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فأن القيم التقريبية المضبوطة ستكون كالتالي:

$dX_u = -0.11$ m
$dY_u = -0.01$ m

أي أن القيم المجهولة للنقطة U تصبح:

$X_{u\,1} = 1173.20 - 0.11 = 1173.09$ m
$Y_{u1} = 1100.00 - 0.01 = 1099.99$ m

وفي التكرار الثاني نستخدم هذه القيم كقيم تقريبية مرة أخري ونعيد خطوات الحل السابقة، وستكون نتائج هذا التكرار الثاني (في هذا المثال) أن التصحيحات تساوي صفر مما يدل علي أنه لا داعي لعمل أية تكرارات إضافية للحل ومن ثم فسنكون قد حصلنا علي القيم النهائية المضبوطة للنقطة U.

ويمكن حساب قيمة الخطأ المعياري لرصده لها وحدة وزن واحدة (المعادلة ١١-٧) لتكون:

$\sigma_o = 1.82$

وباستخدام المعادلة (١١-٨) وحساب الخطأ المعياري للقيم المضبوطة نحصل علي:

$\sigma X_u = \pm 0.023$ m
$\sigma Y_u = \pm 0.029$ m

أما المتبقيات residuals فيمكن حسابها (المعادلة ١١-٦) ونحصل علي:

$$\begin{aligned} v_{ru} &= -0.11 \text{ m} \\ v_{us} &= -0.12 \text{ m} \\ v_{\theta 1} &= -49'' \\ v_{\theta 2} &= -17'' \\ v_{\theta 3} &= 6'' \end{aligned}$$

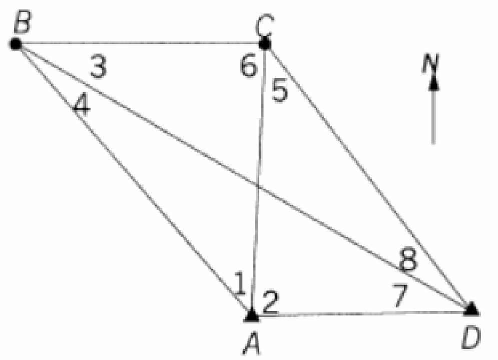
وتكون الأرصاد المضبوطة (المعادلة ١١-١٠) كالتالي:

Adjusted Distance Observations				
Station Occupied	Station Sighted	Distance	V	σ
R	U	199.89	−0.11	0.061
U	S	99.88	−0.12	0.065

Adjusted Angle Observations					
Station Backsight	Station Occupied	Station Foresight	Angle	V	σ
Q	R	U	239° 59′ 11″	−49″	29.0″
R	U	S	149° 59′ 43″	−17″	44.1″
S	S	T	240° 01′ 06″	6″	35.0″

٢-١٣ مثال لضبط الشكل الرباعي

تم رصد الزوايا الداخلية الثمانية في الشكل الرباعي التالي وكانت النقطتين A, D معلومتي الإحداثيات كما في الجدول التالي:



1 = 42°35′29.0″	3 = 79°54′42.1″	5 = 21°29′23.9″	7 = 31°20′45.8″
2 = 87°35′10.6″	4 = 18°28′22.4″	6 = 39°01′35.4″	8 = 39°34′27.9″
The fixed coordinates are			
x_A = 9270.33	y_A = 8448.90	x_D = 15,610.58	y_D = 8568.75

والمطلوب استخدام طريقة مجموع أقل المربعات لحساب قيم إحداثيات النقطتين B, C (وللتبسيط هنا لن نستخدم أوزان، أو بمعنى آخر سنفترض أن جميع الأرصاد متساوية الوزن أي أن مصفوفة الوزن تساوي مصفوفة الوحدة W = I).

سيتكون متجه القيم المجهولة $X_{4,1}$ كالتالي:

$$X = \begin{bmatrix} dx_b \\ dy_b \\ dx_c \\ dy_c \end{bmatrix}$$

ولحساب القيم التقريبية للنقطتين B, C يمكن استخدام معادلات حل المثلثات (الفصل الأول)، فمثلا يمكن حل المثلث BAD بمعلومية الزوايا الثلاثة ٤، ٧ ، (١+٢) وطول الضلع AD (يمكن حسابه من الإحداثيات المعلومة لطرفيه) ومن ثم حساب إحداثيات النقطة B ، وبالمثل يمكن حساب إحداثيات النقطة C (أنظر تفاصيل رياضية أكثر في المثال التالي) لنحصل في النهاية علي القيم التقريبية التالية:

Station	X	Y
B	2,403.600	16,275.400
C	9,649.800	24,803.500

أما مصفوفة جاكوب (التفاضل الأول) فستتكون بتطبيق المعادلة (١٠-٢٠) ومن ثم فأن المصفوفة $J_{5,5}$ ستكون كالتالي:

$$\begin{bmatrix} -14.891521 & -13.065362 & 12.605250 & -0.292475 \\ 0.000000 & 0.000000 & -12.605250 & 0.292475 \\ 20.844399 & -0.283839 & -14.045867 & 11.934565 \\ 8.092990 & 1.414636 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.409396 & -4.403165 \\ -14.045867 & 11.934565 & 1.440617 & -11.642090 \\ 6.798531 & 11.650726 & 0.000000 & 0.000000 \\ -6.798531 & -11.650726 & 11.195854 & 4.110690 \end{bmatrix}$$

أما متجه الأرصاد $b_{5,1}$ فسيكون كالتالي:

$$\begin{bmatrix} -1.811949 \\ -5.801621 \\ 3.508571 \\ 1.396963 \\ -1.833544 \\ 5.806415 \\ -5.983393 \\ 1.818557 \end{bmatrix}$$

وبما أنه لا يوجد وزن، فأن حل معادلة المصفوفات سيكون:

$$X = (J^T J)^{-1}(J^T b)$$

وبذلك تكون نتائج التكرار الأول كالتالي:

$$\begin{bmatrix} -0.011149 \\ 0.049461 \\ 0.061882 \\ 0.036935 \end{bmatrix}$$

وفي التكرار الثاني تكون المصفوفات J, b, X كالتالي:

J				b	X
-14.891488	-13.065272	12.605219	-0.292521	-2.100998	0.000000
0.000000	0.000000	-12.605219	0.292521	-5.032381	-0.000000
20.844296	-0.283922	-14.045752	11.934605	4.183396	0.000000
8.092944	1.414588	0.000000	0.000000	1.417225	-0.000001
0.000000	0.000000	1.409357	-4.403162	-1.758129	
-14.045752	11.934605	1.440533	-11.642083	5.400377	
6.798544	11.650683	0.000000	0.000000	-6.483846	
-6.798544	-11.650683	11.195862	4.110641	1.474357	

وحيث أن التصحيحات أصبحت تساوي الصفر فلا حاجة لتكرارات أخري. ومن ثم فأن النتائج النهائية تكون كالتالي:

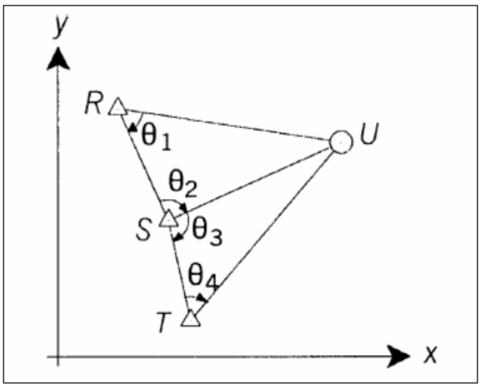
Station	X	Y	σ_x	σ_y
B	2,403.589	16,275.449	0.4690	0.4895
C	9,649.862	24,803.537	0.3447	0.8622

وتكون الأرصاد المضبوطة كالتالي
:

Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle	V	σ
B	A	C	42° 35′ 31.1″	2.10″	3.65
C	A	D	87° 35′ 15.6″	5.03″	4.33
C	B	D	79° 54′ 37.9″	-4.18″	4.29
D	B	A	18° 28′ 21.0″	-1.42″	3.36
D	C	A	21° 29′ 25.7″	1.76″	3.79
A	C	B	39° 01′ 30.0″	-5.40″	4.37
A	D	B	31° 20′ 52.3″	6.48″	4.24
B	D	C	39° 34′ 26.4″	-1.47″	3.54

٣-١٣ مثال لضبط التقاطع الأمامي

في الشكل التالي تم رصد أربعة زوايا من النقاط المعلومة الثلاثة R, S, T إلي النقطة المجهولة U ، وكانت الأرصاد و الإحداثيات المعلومة كما في الجدول التالي:



$\theta_1 = 50°06'50''$	$\theta_2 = 101°30'47''$	$\theta_3 = 98°41'17''$	$\theta_4 = 59°17'01''$
$x_r = 865.40$	$x_s = 2432.55$	$x_t = 2865.22$	
$y_r = 4527.15$	$y_s = 2047.25$	$y_t = 27.15$	

أستخدم مجموع أقل المربعات (الأرصاد متساوية الوزن) لحساب إحداثيات النقطة U ؟

الخطوة الأولي:

حساب الإحداثيات التقريبية للنقطة المجهولة:

نحسب طول الخط RS من الإحداثيات المعلومة لكلا نقطتيه:

$$RS = \sqrt{(2432.55 - 865.40)^2 + (4527.15 - 2047.25)^2} = 2933.58$$

نحسب انحراف الخط RS :

$$AZ_{RS} = \tan^{-1}\left(\frac{X_S - X_R}{Y_S - Y_R}\right) + C$$

$$AZ_{RS} = \tan^{-1}(865.40 - 2432.55 / 4527.15 - 2047.25) + 180^o = 127^o 42' 34''$$

نحسب الانحراف التقريبي للخط RU :

$$AZ_{RTo} = AZ_{RS} - \theta_1$$

$$AZ_{RTo} = 127^o 42' 34'' - 50^o 06' 50'' = 97^o 35' 44''$$

باستخدام قاعدة جيب الزاوية sin في المثلث RUS يمكن حساب الطول التقريبية للخط RU :

$$RU_o = RS \sin\theta_2 / (\sin(180 - \theta_1 - \theta_2))$$

$$RU_o = 2933.58 \sin(100^o 30' 47'') / \sin(28^o 27' 23'') = 6049.00$$

باستخدام طول و انحراف RU (التقريبيين) يمكن الآن حساب الإحداثيات التقريبية للنقطة U :

$$X_{Uo} = X_R + RU_o \sin AZ_{RUo}$$
$$X_{Uo} = 865.40 + 6049.0 \sin(97^o 35' 44") = 6861.35$$
$$Y_{Uo} = Y_R + RU_o \cos AZ_{RUo}$$
$$Y_{Uo} = 865.40 + 6049.0 \cos(97^o 35' 44") = 3727.59$$

وباستخدام هذه الإحداثيات التقريبية للنقطة U يمكننا حساب قيمة تقريبية للمسافتين SU, TU :

$$SU_o = \sqrt{(6861.35 - 2432.55)^2 + (3727.59 - 2047.25)^2} = 4736.83$$
$$TU_o = \sqrt{(6861.35 - 2865.22)^2 + (3727.59 - 27.15)^2} = 5446.29$$

<u>الخطوة الثانية:</u>
نكون معادلات الرصد الخطية لأرصاد الزوايا الأفقية بتطبيق مجموعة مشتقات تايلور :

$$\left(\frac{y_r - y_u}{RU^2}\right)_0 dx_u + \left(\frac{x_u - x_r}{RU^2}\right)_0 dy_u$$
$$= \theta_1 - \left[\tan^{-1}\frac{x_s - x_r}{y_s - y_r} - \tan^{-1}\left(\frac{x_u - x_r}{y_u - y_r}\right)_0 + 0^\circ\right] + v_1$$

$$\left(\frac{y_u - y_s}{SU^2}\right)_0 dx_u + \left(\frac{x_s - x_u}{SU^2}\right)_0 dy_u$$
$$= \theta_2 - \left[\tan^{-1}\left(\frac{x_u - x_s}{y_u - y_s}\right)_0 - \tan^{-1}\frac{x_r - x_s}{y_r - y_s} + 0^\circ\right] + v_2$$

$$\left(\frac{y_s - y_u}{SU^2}\right)_0 dx_u + \left(\frac{x_u - x_s}{SU^2}\right)_0 dy_u$$
$$= \theta_3 - \left[\tan^{-1}\frac{x_t - x_s}{y_t - y_s} - \tan^{-1}\left(\frac{x_u - x_s}{y_u - y_s}\right)_0 + 180^\circ\right] + v_3$$

$$\left(\frac{y_u - y_t}{TU^2}\right)_0 dx_u + \left(\frac{x_t - x_u}{TU^2}\right)_0 dy_u$$
$$= \theta_4 - \left[\tan^{-1}\left(\frac{x_u - x_t}{y_u - y_t}\right)_0 - \tan^{-1}\frac{x_s - x_t}{y_s - y_t} + 0^\circ\right] + v_4$$

نعوض بالقيم في هذه المعادلات مع ضرب الجانب الأيسر لكل معادلة في الثابت رو ρ = ٢٠٦٢٦٥ (لتحويل الوحدات الطولية إلي وحدات زاوية) فنحصل علي مصفوفة جاكوب $J_{4,2}$ وأيضا متجه المعاملات $b_{4,1}$ كالتالي:

$$J = \rho \begin{bmatrix} \dfrac{4527.15 - 3727.59}{6049.00^2} & \dfrac{6861.35 - 865.40}{6049.00^2} \\ \dfrac{3727.59 - 2047.25}{4736.83^2} & \dfrac{2432.55 - 6861.35}{4736.83^2} \\ \dfrac{2047.25 - 3727.59}{4736.83^2} & \dfrac{6861.35 - 2432.55}{4736.83^2} \\ \dfrac{3727.59 - 27.15}{5446.29^2} & \dfrac{2865.22 - 6861.35}{5446.29^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.507 & 33.800 \\ 15.447 & -40.713 \\ -15.447 & 40.713 \\ 25.732 & -27.788 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 50°06'50'' - \left(\tan^{-1}\dfrac{2432.55 - 865.40}{2047.25 - 4527.15} - \tan^{-1}\dfrac{6861.35 - 865.40}{3727.59 - 4527.15} + 0°\right) \\ 101°30'47'' - \left(\tan^{-1}\dfrac{6861.35 - 2432.55}{3727.59 - 2047.25} - \tan^{-1}\dfrac{865.40 - 2432.55}{4527.15 - 2047.25} + 0°\right) \\ 98°41'17'' - \left(\tan^{-1}\dfrac{2865.22 - 2432.55}{27.15 - 2047.25} - \tan^{-1}\dfrac{6861.35 - 2432.55}{3727.59 - 2047.25} + 180°\right) \\ 59°17'01'' - \left(\tan^{-1}\dfrac{6861.35 - 2865.22}{3727.59 - 27.15} - \tan^{-1}\dfrac{2432.55 - 2865.22}{2047.25 - 27.15} + 0°\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00'' \\ 0.00'' \\ -0.69'' \\ -20.23'' \end{bmatrix}$$

<u>الخطوة الثالثة:</u>

الآن نبدأ حل مجموعة معادلات مجموع أقل المربعات كالتالي:

$$X = (J^T J)^{-1}(J^T b)$$

$$J^T J = \begin{bmatrix} 1159.7 & -1820.5 \\ -1820.5 & 5229.7 \end{bmatrix}$$

$$(J^T J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.001901 & 0.000662 \\ 0.000662 & 0.000422 \end{bmatrix}$$

$$J^T K = \begin{bmatrix} -509.9 \\ 534.1 \end{bmatrix}$$

$$X = (J^T J)^{-1}(J^T K) = \begin{bmatrix} 0.001901 & 0.000662 \\ 0.000662 & 0.000422 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -509.9 \\ 534.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_u \\ dy_u \end{bmatrix}$$

$$dx_u = -0.62 \quad \text{and} \quad dy_u = -0.11$$

<u>الخطوة الرابعة:</u>

نضيف قيم التصحيحات إلي قيم الإحداثيات التقريبية للنقطة U لنحصل علي قيم إحداثياتها النهائية في التكرار الأول:

$$x_u = x_{u_0} + dx_u = 6861.35 - 0.62 = 6860.73$$

$$y_u = y_{u_0} + dy_u = 3727.59 - 0.11 = 3727.48$$

الخطوة الخامسة:

نبدأ التكرار الثاني باعتبار أن القيم النهائية للتكرار الأول هي القيم التقريبية الجديدة ونعيد الخطوات السابقة كلها. وسنجد في نهاية التكرار الثاني أن قيم التصحيحات dX_U, dY_U تساوي الصفر مما يدل علي أن نتائج التكرار الأول تعد نتائج نهائية.

الخطوة السادسة:

حساب متجه المتبقيات $v_{4,1}$ كالتالي:

$$V = JX - b = \begin{bmatrix} 4.507 & 33.80 \\ 15.447 & -40.713 \\ -15.447 & 40.713 \\ 25.732 & -27.788 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.62 \\ -0.11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00'' \\ 0.00'' \\ -0.69'' \\ -20.23'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.5'' \\ -5.1'' \\ 5.8'' \\ 7.3'' \end{bmatrix}$$

حساب قيمة الخطأ المعياري لرصده لها وحدة وزن واحدة:

$$V^TV = [-6.5 \quad -5.1 \quad 5.8 \quad 7.3] \begin{bmatrix} -6.5 \\ -5.1 \\ 5.8 \\ 7.3 \end{bmatrix} = [155.2]$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{V^TV}{m-n}} = \sqrt{\frac{155.2}{4-2}} = \pm 8.8''$$

حساب الخطأ المعياري للإحداثيات المضبوطة النقطة U :

$$S_{x_u} = S_0\sqrt{Q_{x_u x_u}} = \pm 8.8\sqrt{0.001901} = \pm 0.38$$

$$S_{y_u} = S_0\sqrt{Q_{y_u y_u}} = \pm 8.8\sqrt{0.000422} = \pm 0.18$$

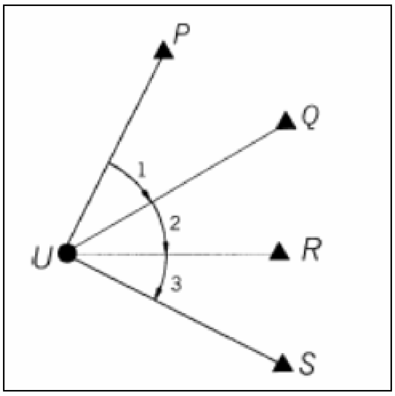
ومن ثم فأن النتائج النهائية للضبط (إحداثيات النقطة المجهولة U) ستكون :

$X_U = 6860.73 \pm 0.38$ m

$Y_U = 3727.48 \pm 0.18$ m

١٣-٤ مثال لضبط التقاطع الخلفي

في الشكل التالي تم احتلال النقطة المجهولة U وتم رصد الزوايا الأفقية الثلاثة إلي النقاط الأربعة المعلومة P, Q, R, S والمطلوب حساب إحداثيات U .



الخطوة الأولي:

حساب الإحداثيات التقريبية للنقطة المجهولة:

قم بإتباع الخطوات الرياضية التالية:

$$\text{triangle } PQU: \quad \frac{QU}{\sin \angle QPU} = \frac{PQ}{\sin \angle 1} \tag{1}$$

$$\text{triangle } URQ: \quad \frac{QU}{\sin \angle URQ} = \frac{QR}{\sin \angle 2} \tag{2}$$

ومن حل هاتين المعادلتين معا قم بحساب المسافة QU لنحصل علي:

$$\frac{PQ \sin \angle PQU}{\sin \angle 1} = \frac{QR \sin \angle URQ}{\sin \angle 2} \tag{3}$$

أي أننا يمكننا اعتبار أن:

$$H = \frac{\sin \angle QPU}{\sin \angle URQ} = \frac{QR \sin \angle 1}{PQ \sin \angle 2} \tag{4}$$

وحيث أن:

$$\angle QPU + \angle URQ = G = 360^\circ - (\angle 1 + \angle 2 + \angle RQP) \tag{5}$$

إذن:

$$\angle QPU = G - \angle URQ \tag{6}$$

وبحل المعادلة ٤ (لحساب sin QPU) والتعويض في المعادلة ٦ نحصل علي:

$$\sin(G - \angle URQ) = H \sin\angle URQ \tag{7}$$

ومن قواعد حساب المثلثات (أنظر الفصل الأول) فلدينا قاعدة تقول أن:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

فنطبق هذه القاعدة علي المعادلة ٧ فنحصل علي:

$$\sin G - \angle URQ = \sin G \cos\angle URQ - \cos G \sin\angle URQ \tag{8}$$

$$\sin G - \angle URQ = H \sin \angle URQ \tag{9}$$

بقسمة المعادلة ٩ علي cos URQ فأن:

$$\sin G = \tan\angle URQ[H + \cos(G)] \tag{10}$$

ومنها نستنتج أن:

$$\angle URQ = \tan^{-1} \frac{\sin G}{H + \cos G} \tag{11}$$

ومن الشكل يمكننا استنتاج أن:

$$\angle RQU = 180^\circ - (\angle 2 + \angle URQ) \tag{12}$$

وبتطبيق قانون جيب الزاوية فأن:

$$RU = \frac{QR \sin \angle RQU}{\sin \angle 2} \tag{13}$$

وأخيرا يمكننا الآن حساب القيم التقريبية للنقطة المجهولة كالتالي:

$$x_u = x_r + RU \sin(\mathrm{Az}_{RQ} - \angle URQ)$$

$$y_u = y_r + RU \cos(\mathrm{Az}_{RQ} - \angle URQ) \tag{14}$$

الآن سنعوض في هذا المثال بقيم الأرصاد و الإحداثيات المعلومة وهي كالتالي: إحداثيات النقطة P = ١٣٠٣.٥٩٩ ، ١٤٥٨.٦١٥ ، إحداثيات النقطة Q = ١٦٣٦.٤٣٦ ، ١٣١٠.٤٦٨ ، إحداثيات النقطة R = ١٥٠٣.٣٩٥ ، ٨٨٨.٣٦٢ ، إحداثيات النقطة S = ١٥٠٦.٢٦٢ ، ٧٨٥.٠٦١ متر، بينما قيم الزوايا المقاسة كالتالي:

Backsight	Occupied	Foresight	Angle	S (″)
P	U	Q	30°29′33″	5
Q	U	R	38°30′31″	6
R	U	S	10°29′57″	6

فتكون خطوات الحل السابقة كما يلي:

$$\angle RQP = \mathrm{Az}_{PQ} - \mathrm{Az}_{QR} = 293°59'38.4'' - 197°29'38.4'' = 96°30'00.0''$$

$$G = 360° - (30°29'33'' + 38°30'31'' + 96°30'00.0'') = 194°29'56''$$

$$PQ = 364.318 \quad \text{and} \quad QR = 442.576$$

$$H = \frac{442.576 \sin(30°29'33'')}{364.318 \sin(38°30'31'')} = 0.990027302$$

$$\angle URQ = \tan^{-1}\frac{\sin(194°29'56'')}{0.990027302 + \cos(194°29'56'')} + 180° = -85°00'22'' + 180° = 94°59'36.3''$$

$$\angle RQU = 180° - (38°30'31'' + 94°59'36.3'') = 46°29'52.7''$$

$$RU = \frac{442.576 \sin(46°29'52.7'')}{\sin(38°30'31'')} = 515.589$$

$$\mathrm{Az}_{RQ} = \tan^{-1}\frac{1636.436 - 1503.395}{1310.468 - 888.362} + 0° = 17°29'38.4''$$

$$\mathrm{Az}_{RQ} = 197°29'38.4'' - 180° = 17°29'38.4''$$

$$\mathrm{Az}_{RU} = \mathrm{Az}_{RQ} - \angle URQ = 360° + 17°29'38.4'' - 94°59'36.3'' = 282°30'02.2''$$

$$x_u = 1503.395 + 515.589 \sin \mathrm{Az}_{RU} = 1000.03$$

$$y_u = 888.362 + 515.589 \cos \mathrm{Az}_{RU} = 999.96$$

<u>الخطوة الثانية:</u>
نكون معادلات الرصد الخطية لأرصاد الزوايا الأفقية بتطبيق مجموعة مشتقات تايلور :

$$J = \rho\begin{bmatrix} \left(\frac{y_p - y_u}{UP^2} - \frac{y_q - y_u}{UQ^2}\right)_0 & \left(\frac{x_u - x_p}{UP^2} - \frac{x_u - x_q}{UQ^2}\right)_0 \\ \left(\frac{y_q - y_u}{UQ} - \frac{y_r - y_u}{UR^2}\right)_0 & \left(\frac{x_u - x_q}{UQ^2} - \frac{x_u - x_r}{UR^2}\right)_0 \\ \left(\frac{y_r - y_u}{UR^2} - \frac{y_s - y_u}{US^2}\right)_0 & \left(\frac{x_u - x_r}{UR^2} - \frac{x_u - x_s}{US^2}\right)_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 184.993596 & 54.807717 \\ 214.320813 & 128.785353 \\ 59.963802 & -45.336838 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} (\angle 1 - \angle 1_0)'' \\ (\angle 2 - \angle 2_0)'' \\ (\angle 3 - \angle 3_0)'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.203359 \\ 0.159052 \\ 6.792817 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{5^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^2} \end{bmatrix}$$

<u>الخطوة الثالثة:</u>
الآن نبدأ حل مجموعة معادلات مجموع أقل المربعات كالتالي:

$$X = (J^TWJ)^{-1}(J^TWb)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.031107 \\ 0.065296 \end{bmatrix}$$

<u>الخطوة الرابعة:</u>
نضيف قيم التصحيحات إلي قيم الإحداثيات التقريبية للنقطة U لنحصل علي قيم إحداثياتها النهائية في التكرار الأول:

$X_U = X_{UO} + dX = 1000.03 - 0.031 = 999.999$

$Y_U = Y_{UO} + dY = 999.96 + 0.065 = 1000.025$

<u>الخطوة الخامسة:</u>
نبدأ التكرار الثاني باعتبار أن القيم النهائية للتكرار الأول هي القيم التقريبية الجديدة ونعيد الخطوات السابقة كلها. وسنجد في نهاية التكرار الثاني أن قيم التصحيحات dX_U, dY_U تساوي الصفر مما يدل علي أن نتائج التكرار الأول تعد نتائج نهائية.

الخطوة السادسة:

حساب قيمة الخطأ المعياري لرصده لها وحدة وزن واحدة:

$\sigma_o = 0.60$

حساب قيم المتبقيات و الأرصاد المضبوطة والخطأ المعياري لها:

Adjusted Angle Observations					
Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle	V	σ(")
P	U	Q	30° 29′ 31″	-2.0″	2.3
Q	U	R	38° 30′ 33″	1.9″	3.1
R	U	S	10° 29′ 59″	2.0″	3.0

حساب الخطأ المعياري للإحداثيات المضبوطة النقطة U :

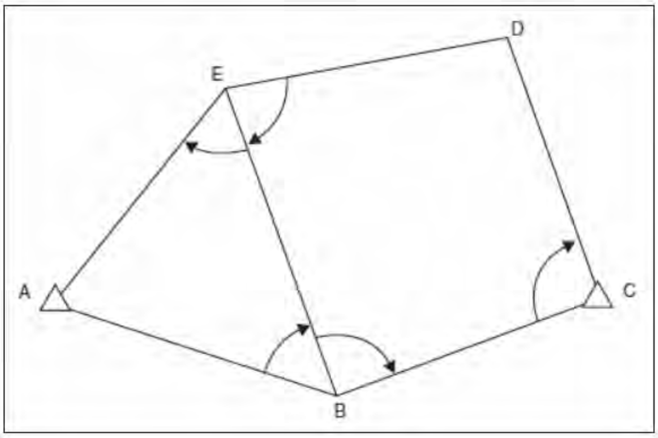
$\sigma_X = 0.0206$
$\sigma_Y = 0.0427$

ومن ثم فأن النتائج النهائية للضبط (إحداثيات النقطة المجهولة U) ستكون :

$X_U = \;\; 999.999 \;\; \pm 0.021$ m
$Y_U = 1000.025 \;\; \pm 0.043$ m

١٣-٥ مثال لضبط الترافرس المغلق

الشكل التالي يمثل ترافرس مغلق يتكون من خمسة نقاط، اثنتين منهم معلومتي الإحداثيات A,C والمطلوب حساب الإحداثيات المضبوطة للنقاط الثلاثة B, E, D:



وكانت القيم المعلومة للإحداثيات و الزوايا المقاسة (بدقة ±٥") والمسافات المقاسة (بدقة ±٠.٠٠٤ متر) كما في الجدول التالي:

A	1000.000	2000.000	معلوم
C	1734.563	2002.972	
B	1385.7	1878.2	
D	1611.7	2354.7	تقريبي
E	1238.7	2294.7	

The observed angles are:

ABE	58° 02′ 29″
EBC	89° 45′ 36″
BCD	90° 25′ 48″
DEB	79° 41′ 30″
BEA	58° 26′ 17″

The observed distances are:

AB	404.453 m
AE	379.284 m
BC	370.520 m
BE	441.701 m
CD	372.551 m
DE	377.841 m

سيتكون متجه القيم المجهولة كالتالي:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta E_B \\ \delta N_B \\ \delta E_D \\ \delta N_D \\ \delta E_E \\ \delta N_E \end{bmatrix}$$

وباستخدام القيم المعلومة و التقريبية للنقاط الخمسة يمكننا حساب الاتجاهات والمسافات التالية المطلوبة لتكوين مصفوفة المعاملات:

	Directions	Distances
BA	287° 31′ 32.0″	404.4746 m
BE	340° 33′ 35.9″	441.6800 m
BC	70° 19′ 12.9″	370.5043 m
CB	250° 19′ 12.9″	370.5043 m
CD	340° 44′ 42.2″	372.5693 m
EA	219° 00′ 23.9″	379.2437 m
EB	160° 33′ 35.9″	441.6800 m
ED	80° 51′ 42.5″	377.7949 m

وستكون مصفوفة المعاملات $A_{11,6}$ كالآتي:

Coefficient of	δE_B	δN_B	δE_D	δN_D	δE_E	δN_E
Angles						
ABE	$\frac{\cos\alpha_{BA}}{l_{BA}\sin 1''}-\frac{\cos\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}-\frac{\sin\alpha_{BA}}{l_{BA}\sin 1''}$	0	0	$\frac{\cos\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}$	$\frac{-\sin\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}$
EBC	$\frac{\cos\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}-\frac{\cos\alpha_{BC}}{l_{BC}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{BC}}{l_{BC}\sin 1''}-\frac{\sin\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}$	0	0	$\frac{-\cos\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{BE}}{l_{BE}\sin 1''}$
BCD	$\frac{-\cos\alpha_{CB}}{l_{CB}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{CB}}{l_{CB}\sin 1''}$	$\frac{\cos\alpha_{CD}}{l_{CD}\sin 1''}$	$\frac{-\sin\alpha_{CD}}{l_{CD}\sin 1''}$	0	0
DEB	$\frac{\cos\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}$	$\frac{-\sin\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}$	$\frac{-\cos\alpha_{ED}}{l_{ED}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{ED}}{l_{ED}\sin 1''}$	$\frac{\cos\alpha_{ED}}{l_{ED}\sin 1''}-\frac{\cos\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}-\frac{\sin\alpha_{ED}}{l_{ED}\sin 1''}$
BEA	$\frac{-\cos\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}$	0	0	$\frac{\cos\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}-\frac{\cos\alpha_{EA}}{l_{EA}\sin 1''}$	$\frac{\sin\alpha_{EA}}{l_{EA}\sin 1''}-\frac{\sin\alpha_{EB}}{l_{EB}\sin 1''}$
Distances						
AB	$\sin\alpha_{AB}$	$\cos\alpha_{AB}$	0	0	0	0
AE	0	0	0	0	$\sin\alpha_{AE}$	$\cos\alpha_{AE}$
BC	$-\sin\alpha_{BC}$	$-\cos\alpha_{BC}$	0	0	0	0
BE	$-\sin\alpha_{BE}$	$-\cos\alpha_{BE}$	0	0	$\sin\alpha_{BE}$	$\cos\alpha_{BE}$
CD	0	0	$\sin\alpha_{CD}$	$\cos\alpha_{CD}$	0	0
DE	0	0	$-\sin\alpha_{DE}$	$-\cos\alpha_{DE}$	$\sin\alpha_{DE}$	$\cos\alpha_{DE}$

وبالتعويض بالقيم ستصبح A كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix}
-287 & 331 & 0 & 0 & 440 & 155\\
253 & 680 & 0 & 0 & -440 & -155\\
187 & -524 & 523 & 183 & 0 & 0\\
-440 & -155 & -87 & 539 & 527 & -384\\
440 & 155 & 0 & 0 & -18 & -498\\
0.954 & -0.301 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.629 & 0.777\\
-0.942 & -0.337 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.333 & -0.943 & 0 & 0 & -0.333 & 0.943\\
0 & 0 & -0.330 & 0.944 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.987 & 0.159 & -0.987 & -0.159
\end{bmatrix}$$

ومن ثم فأن مصفوفة الوزن $W_{11,11}$ ستتكون من مربع مقلوب الخطأ المعياري لأرصاد الزوايا المقاسة (±٥") ومربع مقلوب الخطأ المعياري لأرصاد المسافات (±٠.٠٠٤ متر) لتصبح كالتالي:

$$W=\begin{bmatrix}
0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62\,500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62\,500 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62\,500 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62\,500 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62\,500 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62\,500
\end{bmatrix}$$

أما متجه فروق الأرصاد (القيم المقاسة ناقص القيم المحسوبة) $b_{11,1}$ فسيكون:

$$b=\begin{bmatrix}
53^\circ\,02'\,29'' - 340^\circ\,33'\,35.9'' + 298^\circ\,31'\,32.0''\\
89^\circ\,45'\,36'' - 70^\circ\,19'\,12.9'' + 340^\circ\,33'\,35.9'' - 360^\circ\\
90^\circ\,25'\,48'' - 340^\circ\,44'\,42.2'' + 250^\circ\,19'\,12.9''\\
79^\circ\,41'\,30'' - 160^\circ\,33'\,35.9'' + 85^\circ\,51'\,42.5''\\
58^\circ\,26'\,17'' - 219^\circ\,00'\,23.9'' + 160^\circ\,33'\,35.9''\\
404.453\text{ m} - 404.4746\text{ m}\\
379.284\text{ m} - 379.2437\text{ m}\\
370.520\text{ m} - 370.5043\text{ m}\\
441.701\text{ m} - 441.6800\text{ m}\\
372.551\text{ m} - 372.5693\text{ m}\\
377.841\text{ m} - 377.7949\text{ m}
\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
25.1''\\ -1.0''\\ 18.7''\\ -23.4''\\ -31.0''\\ -0.0216\text{ m}\\ 0.0403\text{ m}\\ 0.0157\text{ m}\\ 0.0210\text{ m}\\ -0.0183\text{ m}\\ 0.0461\text{ m}
\end{bmatrix}$$

والآن يمكن البدء في خطوات الحل أو الضبط بطريقة مجموع أقل المربعات كالتالي:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}=\begin{bmatrix} -11.47 & 10.11 & 7.50 & -17.62 & 17.62 & 59599 & 0 & -58849 & 20801 & 0 & 0 \\ 13.23 & 27.18 & -20.97 & -6.22 & 6.22 & -18821 & 0 & -21048 & -58937 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.91 & -3.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20611 & 61707 \\ 0 & 0 & 7.30 & 21.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59004 & 9926 \\ 17.62 & -17.62 & 0 & 21.08 & -0.71 & 0 & 39338 & 0 & -20801 & 0 & -61707 \\ 6.22 & -6.22 & 0 & -15.34 & -19.91 & 0 & 48567 & 0 & 58937 & 0 & -9926 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{WA}=\begin{bmatrix} 141937 & -13120 & 5447 & -8126 & -26027 & 14249 \\ -13120 & 104111 & -10420 & -7179 & 10085 & -58455 \\ 5447 & -10420 & 78948 & -7710 & -62752 & -8470 \\ -8126 & -7179 & -7710 & 70235 & 1565 & -9848 \\ -26027 & 10085 & -62752 & 1565 & 119246 & 18494 \\ 14249 & -58455 & -8470 & -9848 & 18494 & 112623 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{WA})^{-1}=\begin{bmatrix} 0.00000765 & 0.00000036 & 0.00000158 & 0.00000090 & 0.00000261 & -0.00000101 \\ 0.00000036 & 0.00001487 & 0.00000194 & 0.00000297 & -0.00000149 & 0.00000832 \\ 0.00000158 & 0.00000194 & 0.00002266 & 0.00000271 & 0.00001195 & 0.00000079 \\ 0.00000090 & 0.00000297 & 0.00000271 & 0.00001533 & 0.00000073 & 0.00000285 \\ 0.00000261 & -0.00000149 & 0.00001195 & 0.00000073 & 0.00001578 & -0.00000273 \\ -0.00000101 & 0.00000832 & 0.00000079 & 0.00000285 & -0.00000273 & 0.00001408 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Wb}=\begin{bmatrix} -2071 \\ -1293 \\ 3693 \\ -992 \\ -1704 \\ 3876 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=(\mathbf{A}^T\mathbf{WA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Wb}=\begin{bmatrix} \delta E_B \\ \delta N_B \\ \delta E_D \\ \delta N_D \\ \delta E_E \\ \delta N_E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.020 \\ 0.019 \\ 0.058 \\ -0.001 \\ 0.002 \\ 0.051 \end{bmatrix}$$

وأخيرا يتم إضافة التصحيحات إلي القيم التقريبية لإحداثيات النقاط الثلاثة لنحصل علي القيم النهائية المضبوطة لإحداثياتهم كالتالي:

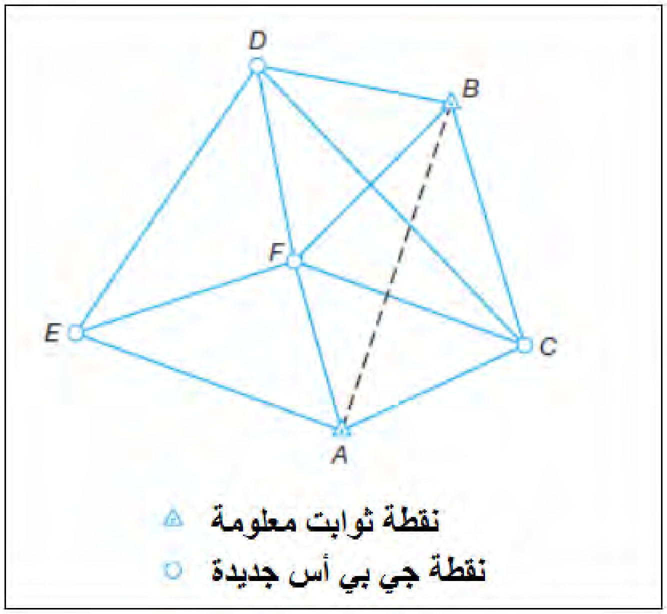
	تقريبي	تصحيح	مضبوط
E_B	1385.7 m	−0.020 m	1385.680 m
N_B	1878.2 m	0.019 m	1878.219 m
E_D	1611.7 m	0.058 m	1611.758 m
N_D	2354.7 m	−0.001 m	2354.699 m
E_E	1238.7 m	0.002 m	1238.702 m
N_E	2294.7 m	0.051 m	2294.751 m

الفصل الرابع عشر

ضبط أرصاد شبكات الجي بي أس

في شبكات نظم الملاحة العالمية بالرصد علي الأقمار الصناعية GNSS (ومنهم النظام العالمي لتحديد المواقع GPS) يتم تطبيق نظرية مجموع أقل المربعات في مرحلتين: (١) مرحلة ضبط الأرصاد إلي كل قمر صناعي بهدف حساب المركبات المضبوطة لكل خط قاعدة مرصود ΔZ, ΔY, ΔX (وهذا ما يقوم به برنامج الحسابات software)، (٢) مرحلة ضبط الشبكة المكونة من مجموعة من خطوط القواعد baselines (وهو موضوعنا في هذا الفصل).

في الشكل التالي تتكون شبكة الجي بي أس من نقطتي ثوابت أرضية معلومين الإحداثيات A, B وأربعة نقاط جي بي أس جديدة:



ومن المرحلة الأولي (ضبط أرصاد الأقمار الصناعية بين طرفي كل خط قاعدة) سينتج لنا المركبات ΔZ, ΔY, ΔX بالإضافة لمصفوفة التباين-الترابط لهذه القيم. فعلي سبيل المثال فأن نتائج الخط AC ستكون علي النحو التالي:

$$\begin{array}{lr} \Delta X & 11{,}644.2232 \\ \Delta Y & 3601.2165 \\ \Delta Z & 3399.2550 \end{array} \begin{bmatrix} 9.8E-4 & -9.6E-6 & 9.5E-6 \\ & 9.4E-4 & -9.5E-6 \\ & & 9.8E-4 \end{bmatrix}$$

وكما سبق القول في الفصل الثاني عشر فأن هذه المصفوفة تكون متماثلة symmetric أي أن عناصر ما تحت القطر تتماثل مع عناصر ما فوق القطر (لذلك فلم نكتبها في المثال السابق). والجدول التالي يمثل قيم الأرصاد (مركبات الخطوط) وعناصر مصفوفة التباين-الترابط لكل

خط: العمود ١ يمثل العنصر ١،١، والعمود ٢ يمثل العنصر ٢،١ ، والعمود ٣ يمثل العنصر ٣،١ ، والعمود ٤ يمثل العنصر ٢،٢ ، والعمود ٥ يمثل العنصر ٣،٢ ، والعمود ٦ يمثل العنصر ٣،٣ من عناصر المصفوفة:

Baseline	ΔX	ΔY	ΔZ	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
AC	11644.2232	3601.2165	3399.2550	9.8E-4	−9.6E-6	9.5E-6	9.4E-4	−9.5E-6	9.8E-4
DC	15128.1647	−6286.7054	−6371.0583	1.5E-4	−1.4E-6	1.3E-6	1.6E-4	−1.4E-6	1.3E-4
AE	−5321.7164	3634.0754	3173.6652	2.2E-4	−2.1E-6	2.2E-6	1.9E-4	−2.1E-6	2.0E-4
BC	3960.5442	−6681.2467	−7279.0148	2.3E-4	−2.2E-6	2.1E-6	2.5E-4	−2.2E-6	2.2E-4
BD	−11167.6076	−394.5204	−907.9593	2.7E-4	−2.8E-6	2.8E-6	2.7E-4	−2.7E-6	2.7E-4
DE	−1837.7459	−6253.8534	−6596.6697	1.2E-4	−1.2E-6	1.2E-6	1.3E-4	−1.2E-6	1.3E-4
FA	−1116.4523	−4596.1610	−4355.9062	7.5E-5	−7.9E-7	8.8E-7	6.6E-5	−8.1E-7	7.6E-5
FC	10527.7852	−994.9370	−956.6246	2.6E-4	−2.2E-6	2.4E-6	2.2E-4	−2.3E-6	2.4E-4
FE	−6438.1364	−962.0694	−1182.2305	9.4E-5	−9.2E-7	1.0E-6	1.0E-4	−8.9E-7	8.8E-5
FD	−4600.3787	5291.7785	5414.4311	9.3E-5	−9.9E-7	9.0E-7	9.9E-5	−9.9E-7	1.2E-4
FB	6567.2311	5686.2926	6322.3917	6.6E-5	−6.5E-7	6.9E-7	7.5E-5	−6.4E-7	6.0E-5
BF	−6567.2310	−5686.3033	−6322.9807	5.5E-5	−6.3E-7	6.1E-7	7.5E-5	−6.3E-7	6.6E-5
AF	1116.4577	4596.1553	4355.9141	6.6E-5	−8.0E-7	9.0E-7	8.1E-5	−8.2E-7	9.4E-5

نلاحظ في الجدول السابق أن الخط FB و أيضا الخط AF كلاهما مرصود مرتين، ولذلك فأن الجدول مكون من ١٣ خط قاعدة بينما شكل الشبكة به ١١ خط قاعدة فقط.

أما النقطتين A, B فهما نقطتي ثوابت أرضية و إحداثياتهم كالتالي:

Station	X	Y	Z
A	402.3509	−4,652,995.3011	4,349,760.7775
B	8086.0318	−4,642,712.8474	4,360,439.0833

الآن سنبدأ في تكوين معادلات الأرصاد، وبالطبع فمن المتوقع أن تكون هذه المعادلات خطية وتشبه كثيرا معادلات أرصاد شبكات الميزانية إلا أن كل خط قاعدة سينتج ٣ معادلات رصد (لأنه يتكون من ٣ مركبات). فعلي سبيل المثال فأن معادلات الرصد للخطAC ستكون علي النحو التالي (لاحظ أن نقطة A معلومة الإحداثيات وليست من القيم المطلوب ضبطها):

$$X_C = X_A + \Delta X_{AC} + v_1$$
$$Y_C = Y_A + \Delta Y_{AC} + v_2$$
$$Z_C = Z_A + \Delta Z_{AC} + v_3$$

بينما ستكون معادلات الرصد للخط AD علي النحو التالي (لاحظ أن كلا نقطتي هذا الخط مجهولتين و مطلوب ضبطهما):

$$X_C - X_D = \Delta X_{DC} + v_4$$
$$Y_C - Y_D = \Delta Y_{DC} + v_5$$

$$Z_C - Z_D = \Delta Z_{DC} + v_6$$

ومن ثم يمكن استنباط معادلات الرصد لباقي خطوط القواعد في الشبكة.

وحيث أن عدد خطوط القواعد يبلغ ١٣ فأن عدد الأرصاد n (وعدد معادلات الرصد) سيكون ١٣ × ٣ (كل خط له ٣ مركبات) = ٣٩. أما عدد القيم المجهولة m فسيكون = عدد النقاط الجديدة (٤) × ٣ (الإحداثيات الثلاثية لكل نقطة) = ١٢، ومن ثم فأن درجات الحرية أو عدد الأرصاد الزائدة = m - n = ٣٩ - ١٢ = ٢٧.

وبتحويل معادلات الرصد إلي صورة المصفوفات (المعادلة ١١-٣) فسينتج لنا الآتي:

معادلات الخط AC

معادلات الخط AD

$$A_{39,12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\ & & & \vdots & & & \end{bmatrix}; \quad x_{12,1} = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ X_D \\ Y_D \\ Z_D \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$b_{39,1} = \begin{bmatrix} X_A + \Delta X_{AC} \\ Y_A + \Delta Y_{AC} \\ Z_A + \Delta Z_{AC} \\ \Delta X_{DC} \\ \Delta Y_{DC} \\ \Delta Z_{DC} \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad v_{39,1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

أما معادلة الوزن W فستكون هي مقلوب معادلة التباين-الترابط variance-covariance الناتجة لكل خط قاعدة من مرحلة حسابات الجي بي أس، وحيث أنه لا يوجد ارتباط correlation بين كل خط قاعدة و آخر فأن مصفوفة التباين-الارتباط الكلية للشبكة ستتكون من مجموعات من مصفوفات التباين لكل قاعدة كما في الشكل التالي:

مصفوفة التباين للخط AC مصفوفة التباين للخط AD

$$
W_{39,39} = \begin{bmatrix}
9.8E-4 & -9.6E-6 & 9.5E-6 & 0 & 0 & 0 & \\
-9.6E-6 & 9.4E-4 & -9.5E-6 & 0 & 0 & 0 & \\
9.5E-6 & -9.5E-6 & 9.8E-4 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1.5E-E & -1.4E-6 & 1.3E-6 & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0 & -1.4E-6 & 1.6E-4 & -1.4E-6 & \\
0 & 0 & 0 & 1.3E-6 & -1.4E-6 & 1.3E-4 & \\
 & & & \vdots & & & \ddots
\end{bmatrix}^{-1}
$$

ومن ثم فيمكن تطبيق المعادلة (١١-٤) لحساب القيم المضبوطة للمجاهيل (إحداثيات النقاط الأربعة) وأيضا المعادلة (١١-٨) لحساب الخطأ المعياري لها، والتي ستكون كالتالي:

Station	X	Y	Z	σx	σy	σz
A	402.3509	-4,652,995.3011	4,349,760.7775			
B	8,086.0318	-4,642,712.8474	4,360,439.0833			
C	12,046.5808	-4,649,394.0824	4,353,160.0645	0.0061	0.0061	0.0059
E	-4,919.3388	-4,649,361.2199	4,352,934.4548	0.0052	0.0053	0.0052
D	-3,081.5831	-4,643,107.3692	4,359,531.1234	0.0049	0.0051	0.0051
F	1,518.8012	-4,648,399.1454	4,354,116.6914	0.0027	0.0028	0.0028

أيضا باستخدام المعادلة (١١-١٠) يمكن حساب المتبقيات residuals والتي ستكون علي النحو التالي:

From	To	dX	dY	dZ	Vx	Vy	Vz
A	C	11644.2232	3601.2165	3399.2550	0.00665	0.00219	0.03197
A	E	-5321.7164	3634.0754	3173.6652	0.02665	0.00579	0.01212
B	C	3960.5442	-6681.2467	-7279.0148	0.00475	0.01169	-0.00403
B	D	-11167.6076	-394.5204	-907.9593	-0.00730	-0.00137	-0.00065
D	C	15128.1647	-6286.7054	-6371.0583	-0.00084	-0.00783	-0.00058
D	E	-1837.7459	-6253.8534	-6596.6697	-0.00985	0.00267	0.00117
F	A	-1116.4523	-4596.1610	-4355.9062	0.00197	0.00527	-0.00773
F	C	10527.7852	-994.9370	-956.6246	-0.00568	-0.00004	-0.00236
F	E	-6438.1364	-962.0694	-1182.2305	-0.00368	-0.00514	-0.00611
F	D	-4600.3787	5291.7785	5414.4311	-0.00563	-0.00230	0.00083
F	B	6567.2311	5686.2926	6322.3917	-0.00053	0.00537	0.00017
B	F	-6567.2310	-5686.3033	-6322.3807	0.00043	0.00533	-0.01117
A	F	1116.4577	4596.1553	4355.9141	-0.00737	0.00043	-0.00017

وفي شبكات الجي بي أس فهناك معيار إحصائي (يسمي الدقة النسبية relative precision) يتم تطبيقه لبيان دقة خطوط القواعد بصورة نسبية، ويتم ذلك بحساب قيمة الخطأ المعياري للخط كالتالي:

$$\sigma_{line} = \sqrt{\sigma_{\Delta X}^2 + \sigma_{\Delta Y}^2 + \sigma_{\Delta Z}^2}$$

ثم قسمة هذا الخطأ المعياري للخط علي طول الخط ذاته كالتالي:

$$precion = \sigma_{line} / length$$

والجدول التالي يوضح هذه النتائج لخطوط الشبكة:

من	الي	الخطأ المعياري للخط	طول الخط	الدقة النسبية
From	To	σ line	Length	Precision
A	C	0.0105	12,653.538	1,206,000
A	E	0.0091	7,183.255	794,000
B	C	0.0105	10,644.668	1,015,000
B	D	0.0087	11,211.408	1,282,000
D	C	0.0107	17,577.670	1,641,000
D	E	0.0097	9,273.836	960,000
F	A	0.0048	6,430.015	1,344,000
F	C	0.0104	10,617.871	1,019,000
F	E	0.0086	6,616.111	770,000
F	D	0.0083	8,859.035	1,066,000
F	B	0.0048	10,744.075	2,246,000
B	F	0.0048	10,744.075	2,246,000
A	F	0.0048	6,430.015	1,344,000

الفصل الخامس عشر

ضبط الشبكات المتكاملة

يقدم هذا الفصل عدة أمثلة لتطبيقات الضبط بمجموع أقل المربعات في الشبكات الجيوديسية المتكاملة.

١٥-١ ضبط عناصر التحويل بين مرجعين

المعادلة العامة للتحويل بين مرجعين جيوديسين geodetic datums تتكون من:

$$X_2 = s\, R\, X_1 \qquad (15\text{-}1)$$

حيث:

X_1 متجه الإحداثيات في المرجع الأول
X_2 متجه الإحداثيات في المرجع الثاني
s عنصر المقياس scale factor بين المرجعين
R مصفوفة زوايا الدوران الثلاثة بين المرجعين:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_3 & \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_3 & -\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \sin\theta_1\sin\theta_3 \\ -\cos\theta_2\sin\theta_3 & -\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 + \cos\theta_1\cos\theta_3 & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 + \sin\theta_1\cos\theta_3 \\ \sin\theta_2 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

حيث:

θ_1 زاوية الدوران حول محور X
θ_2 زاوية الدوران حول محور Y
θ_3 زاوية الدوران حول محور Z

وحيث أن قيم زوايا الدوران تكون صغيرة جدا فأن قيمة sin لأي زاوية صغيرة تكاد تكون قيمة الزاوية نفسها (بوحدات الراديان) وقيمة cos لها تكاد تكون ١ بينما حاصل ضرب رقمين صغيرين يكاد يكون صفر. ومن ثم فيمكن تبسيط قيمة عناصر المصفوفة R لتصبح:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 0 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} = I + \Delta R$$

ومن ثم يمكننا إعادة صياغة المعادلة (١٥-١) لتصبح:

$$X_2 = s\, R\, X_1 + T \qquad (15\text{-}2)$$

حيث:

T متجه الانتقال vector of translation parameters الذي يمثل الفرق بين الإحداثيات الثلاثية لمركزي المرجعين.

وهنا يكون لدينا ٧ عناصر مجهولة (عناصر التحويل Transformation parameters) وهم: ٣ زوايا الدوران + ٣ عناصر الانتقال + عنصر القياس s.

أيضا يمكننا إعادة صياغة كلا من s, T علي النحو:

$$s = 1 + \Delta s \qquad (15\text{-}3)$$

$$T = T_o + \Delta T \qquad (15\text{-}4)$$

حيث:

$$T_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_1 \quad \text{and} \quad \Delta T = \begin{bmatrix} \Delta Tx \\ \Delta Ty \\ \Delta Tz \end{bmatrix}$$

وبما أن المعادلة (١٥-٢) ليست معادلة خطية فأن الصورة الخطية لها ستكون (مع التعويض بالمعادلتين ١٥-٣ و ١٥-٤) كالتالي:

$$X_2 - X_1 - T_o = J\, dX \qquad (15\text{-}5)$$

حيث : J مصفوفة جاكوب لكل نقطة معلومة و dX متجه الصحيحات للقيم التقريبية للمجاهيل السبعة:

$$J = \begin{bmatrix} x & 0 & -z & y_i & 1 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & -x_i & 0 & 1 & 0 \\ z & -y & x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad dx = \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta Tx \\ \Delta Ty \\ \Delta Tz \end{bmatrix}$$

<u>مثال ١:</u>

الجدول التالي يوضح الإحداثيات المحلية في المرجع الوطني الأمريكي NAD83 لعدد أربعة نقاط A, E, F, G وأيضا إحداثياتهم المناظرة في المرجع العالمي WGS83 المعتمد علي الإطار العالمي ITRF00. والمطلوب حساب عناصر التحويل بين كلا المرجعين واستخدام هذه العناصر في حساب الإحداثيات المحلية للنقطة B المعلوم إحداثياتها العالمية:

Station	NAD 83			ITRF 00		
	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
A	1,160,604.924	−4,655,917.607	4,188,338.994	1,160,374.046	−4,655,729.681	4,188,609.031
E	1,160,083.830	−4,655,634.217	4,188,722.346	1,159,852.942	−4,655,446.265	4,188,992.349
F	1,160,786.583	−4,655,564.279	4,188,637.038	1,160,555.699	−4,655,376.341	4,188,907.065
G	1,160,648.090	−4,656,191.149	4,188,040.857	1,160,417.220	−4,656,003.238	4,188,310.909
B				1,160,406.372	−4,655,402.864	4,188,929.400

حساب القيم التقريبية لمتجه عناصر الانتقال T_o باستخدام إحداثيات النقطة A (يمكن استخدام أي نقطة معلومة):

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1,160,604.924 - 1,160,374.046 \\ -4,655,917.607 + 4,655,729.681 \\ 4,188,338.994 - 4,188,609.031 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230.877 \\ -187.926 \\ -270.037 \end{bmatrix}$$

التعويض بقيم إحداثيات النقاط الأربعة لتكوين مصفوفة جاكوب $J_{12,7}$ كالتالي:

$$J = \begin{bmatrix} 1160374.046 & 0.000 & -4188609.031 & -4655729.681 & 1 & 0 & 0 \\ -4655729.681 & 4188609.031 & 0.000 & -1160374.046 & 0 & 1 & 0 \\ 4188609.031 & 4655729.681 & 1160374.0464 & 0.000 & 0 & 0 & 1 \\ 1159852.942 & 0.000 & -4188992.349 & -4655446.265 & 1 & 0 & 0 \\ -4655446.265 & 4188992.349 & 0.000 & -1159852.942 & 0 & 1 & 0 \\ 4188992.349 & 4655446.265 & 1159852.942 & 0.000 & 0 & 0 & 1 \\ 1160555.699 & 0.000 & -4188907.065 & -4655376.341 & 1 & 0 & 0 \\ -4655376.341 & 4188907.065 & 0.000 & -1160555.699 & 0 & 1 & 0 \\ 4188907.065 & 4655376.341 & 1160555.699 & 0.000 & 0 & 0 & 1 \\ 1160417.220 & 0.000 & -4188310.909 & -4656003.238 & 1 & 0 & 0 \\ -4656003.238 & 4188310.909 & 0.000 & -1160417.220 & 0 & 1 & 0 \\ 41883120.909 & 4656003.238 & 1160417.220 & 0.000 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حساب قيم متجه المتبقيات $b_{12,1}$ كالتالي:

$$b = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.011 \\ -0.026 \\ 0.034 \\ 0.006 \\ -0.012 \\ 0.010 \\ -0.008 \\ 0.015 \\ -0.015 \end{bmatrix}$$

وبحل معادلات مجموع أقل المربعات نحصل علي:

$$X = \begin{bmatrix} 0.0000000256 \\ -0.0000486262 \\ -0.0000388234 \\ -0.0000146664 \\ -230.9285 \\ 186.7768 \\ 271.3325 \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة أننا في المعادلتين ١٥-٣ و ١٥-٤ قد استخدمنا قيم تقريبية لكلا من s, T بينما لم نستخدم قيم تقريبية لزوايا الدوران، أي أن متجه الحل X يتكون من تصحيحات s, T وقيم (وليس تصحيحات) زوايا الدوران الثلاثة بوحدات الراديان.

إذن:

$s = 1 + 0.0000000256 = 1.0000000256$

$\theta_1 = -0.0000486262^{r} = -0^{o}\ 0'\ 10.02987''$

$\theta_2 = -0.0000388234^{r} = -0^{o}\ 0'\ 08.0079''$

$\theta_3 = -0.0000146664^{r} = -0^{o}\ 0'\ 03.02517''$

$T_x = 230.877 - 230.92 = -0.052$

$T_Y = 187.926 + 186.7768 = -1.149$

$T_Z = -270.037 + 271.3325 = 1.295$

وفي التكرار الثاني لن تكون النتائج مؤثرة، ومن ثم فيمكن اعتبار نتائج التكرار الأول هي النتائج النهائية.

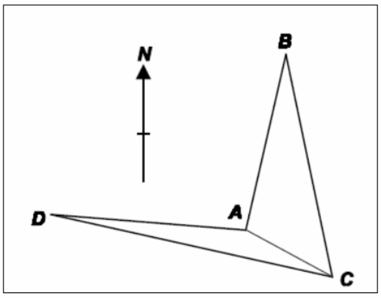
وباستخدام المعادلة ١٥-٢ يمكن حساب قيم الإحداثيات المحلية للنقطة B كالتالي:

X_B on NAD83 = 1160637.257 m
Y_B on NAD83 = -4655590.805 m
Z_B on NAD83 = 4188659.377 m

٢-١٥ ضبط شبكة جيوديسية ثلاثية الأبعاد

مثال ٢:

يمثل الشكل التالي شبكة جيوديسية بسيطة ثلاثية الأبعاد تم فيها قياس الأرصاد الموضحة بالجدول التالي:



Geodetic positions الاحداثيات الجيوديسية

Station	ϕ	λ	H (m)	N (m)
A	41°18′26.04850″N	76°00′10.24860″W	372.221	−31.723
B	41°18′40.46660″N	76°00′05.50180″W	351.394	−31.713
C	41°18′22.04010″N	76°00′00.94390″W	362.865	−31.726
D	41°18′27.65860″N	76°00′31.38550″W	370.874	−31.722

Station	S_n (m)	S_e (m)	S_h (m)
A	±0.001	±0.001	±0.01
B	—	—	±0.01
C	—	—	±0.01

Geodetic azimuth الانحراف الجيوديسي

Course	Azimuth	S (″)
AB	13°56′26.9″	±0.001″

Slant distances المسافات المائلة

Course	Distance (m)	S (m)
AB	458.796	±0.005
AC	249.462	±0.005
CD	729.122	±0.006
DA	494.214	±0.005
BC	578.393	±0.005

Horizontal angles الزوايا الأفقية

Stations (bif)	Angles	S (″)
DAB	98°10′25″	±2.8
BAC	105°47′45″	±3.5
CAD	156°01′44″	±4.1
ABC	335°29′37″	±2.4
CBA	24°30′19″	±2.4
BCD	294°19′17″	±2.3

Zenith angles زوايا السمت

Direction	Angle	S (″)
AC	92°09′01″	±2.5
CD	89°22′24″	±0.8
DA	89°50′44″	±1.2
AB	92°36′12″	±1.4
BC	88°52′01″	±1.1

Elevation differences فروق المناسيب

Stations	ΔElev (m)	S (m)
AC	−9.359	±0.005

المعادلات الخطية للمسافات الأفقية:

علي سبيل المثال ستكون معادلة المسافة AB كالتالي:

$$
\begin{aligned}
&-(\cos v_{AB} \cos \mathrm{Az}_{AB})_0\, dn_A - (\cos v_{AB} \sin \mathrm{Az}_{AB})_0\, de_A - (\sin v_{AB})_0\, du_A \\
&-(\cos v_{BA} \cos \mathrm{Az}_{BA})_0\, dn_B - (\cos v_{BA} \sin \mathrm{Az}_{BA})_0\, de_B - (\sin v_{BA})_0\, du_B = s_{AB} - AB_0
\end{aligned}
$$

وبالتعويض بقيم الأرصاد فأن هذه المعادلة ستصبح:

$$-0.96954dn_A - 0.24067de_A + 0.04541du_A - 0.96954dn_B + 0.24069de_B - 0.04534du_B = 0.0017$$

ويمكن بنفس الطريقة استنباط المعادلات الخطية لبقية المسافات الأفقية المقاسة.

المعادلات الخطية للزوايا الأفقية:

علي سبيل المثال ستكون معادلة الزاوية الأفقية DAB كالتالي:

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\sin \mathrm{Az}_{AD}}{AD \cos v_{AD}}\left(\cos(\phi_D - \phi_A) + \frac{\sin \phi_D \sin(\lambda_D - \lambda_A)}{\tan \mathrm{Az}_{AD}}\right)\right\}_0 dn_D \\
&\quad - \left\{\frac{\cos \mathrm{Az}_{AD}}{AD \cos v_{AD}}[\cos(\lambda_D - \lambda_A) + \sin \phi_A \sin(\lambda_D - \lambda_A) \tan \mathrm{Az}_{AD}]\right\}_0 de_D \\
&\quad - \left\{\frac{\sin \mathrm{Az}_{AD} \cos \phi_D}{AD \cos v_{AD}}[\sin(\lambda_D - \lambda_A) + (\sin \phi_A \cos(\lambda_D - \lambda_A) \quad - \cos \phi_A \tan \phi_D) \tan Az_{AD}]\right\}_0 du_D \\
&\quad + \left(\frac{\sin \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}} - \frac{\sin \mathrm{Az}_{AD}}{AD \cos v_{AD}}\right)_0 dn_A \quad + \left(\frac{\cos \mathrm{Az}_{AD}}{AD \cos v_{AD}} - \frac{\cos \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}}\right)_0 de_A + 0du_A \\
&\quad - \left\{\frac{\sin \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}}\left[\cos(\phi_B - \phi_A) + \frac{\sin \phi_B \sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\tan \mathrm{Az}_{AB}}\right]\right\}_0 dn_B \\
&\quad + \left\{\frac{\cos \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}}[\cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin \phi_A \sin(\lambda_B - \lambda_A) \tan \mathrm{Az}_{AB}]\right\}_0 de_B \\
&\quad + \left\{\frac{\sin \mathrm{Az}_{AB} \cos \phi_B}{AB \cos v_{AB}}[\sin(\lambda_B - \lambda_A) + (\sin \phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A) \quad - \cos \phi_A \tan \phi_B) \tan \mathrm{Az}_{AB}]\right\}_0 du_B = \theta_{DAB} - \theta_0
\end{aligned}
$$

وبالتعويض بقيم الأرصاد فأن هذه المعادلة ستصبح:

$$
\begin{aligned}
&-415.247dn_D - 41.991de_D - 0.00001du_D + 523.669dn_A - 394.828de_A \\
&\quad + 0du_A - 108.432dn_B + 436.790de_B - 0.00003du_B = 11.852''
\end{aligned}
$$

ويمكن بنفس الطريقة استنباط المعادلات الخطية لبقية الزوايا الأفقية المقاسة.

<u>المعادلات الخطية لزوايا السمت zenith angles:</u>

علي سبيل المثال ستكون معادلة زاوية السمت من A إلي C كالتالي:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\sin v_{AC} \cos \mathrm{Az}_{AC}}{AC}\right)_0 dn_A + \left(\frac{\sin v_{AC} \sin \mathrm{Az}_{AC}}{AC}\right)_0 de_A - \left(\frac{\cos v_{AC}}{AC}\right)_0 du_A \\
&\quad + \left(\frac{\begin{array}{c}-\cos \phi_A \sin \phi_C \cos(\lambda_C - \lambda_A) + \sin \phi_A \cos \phi_C \\ + \sin v_{AC} \cos v_{CA} \cos \mathrm{Az}_{CA}\end{array}}{AC \cos v_{AC}}\right)_0 dn_C \\
&\quad + \left(\frac{-\cos \phi_A \sin (\lambda_C - \lambda_A) + \sin v_{AC} \cos v_{CA} \sin \mathrm{Az}_{CA}}{AC \cos v_{AC}}\right)_0 de_C \\
&\quad + \left(\frac{\sin v_{AC} \sin v_{CA} + \sin \phi_A \sin \phi_C + \cos \phi_A \cos \phi_C \cos(\lambda_C - \lambda_A)}{AC \cos v_{AC}}\right)_0 du_C \quad = v_{AC} - v_0
\end{aligned}
$$

وبالتعويض بقيم الأرصاد فأن هذه المعادلة ستصبح:

$$
\begin{aligned}
&15.395dn_A - 26.947de_A - 826.229du_A - 15.379dn_C \\
&\qquad\qquad + 26.919de_C + 826.230du_C = 2.971''
\end{aligned}
$$

ويمكن بنفس الطريقة استنباط المعادلات الخطية لبقية زوايا السمت المقاسة.

المعادلات الخطية للانحرافات:

معادلة الانحراف المقاس AB ستكون كالتالي:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sin \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_B}\right)_0 dn_A - \left(\frac{\cos \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}}\right)_0 de_A + 0du_A \\
&\quad - \left\{\frac{\sin \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}}[\cos(\phi_B - \phi_A) + \sin \phi_B \sin(\lambda_B - \lambda_A) \cos \mathrm{Az}_B]\right\}_0 dn_B \\
&\quad + \left\{\frac{\cos \mathrm{Az}_{AB}}{AB \cos v_{AB}}[\cos(\lambda_B - \lambda_A) - \sin \phi_A \sin(\lambda_B - \lambda_A) \tan \mathrm{Az}_{AB}]\right\}_0 de_B \\
&\quad + \left\{\frac{\cos \mathrm{Az}_{AB} \cos \phi_B}{AB \cos v_{AB}}[\sin(\lambda_B - \lambda_A) - (\sin \phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)\right. \\
&\quad\quad \left. - \cos \phi_A \tan \phi_B) \tan \mathrm{Az}_{AB}]\right\}_0 du_B \quad = \alpha_{AB} - \mathrm{Az}_{AB}
\end{aligned}$$

وبالتعويض بقيم الأرصاد فأن هذه المعادلة ستصبح:

$$\begin{aligned}
&08.42dn_A - 436.79de_A + 0du_A - 108.43dn_B \\
&\qquad + 436.79de_B - 0.00003du_B = -0.256''
\end{aligned}$$

المعادلات الخطية لفرق المنسوب:

معادلة فرق المنسوب المقاس AC ستكون كالتالي:

$$1du_C - 1du_A = \Delta H_{AC} + \Delta N_{AC} - \Delta h_{AC}$$

وبالتعويض بقيم الأرصاد فأن هذه المعادلة ستصبح:

$$\begin{aligned}
&1du_C - 1du_A = -9.359 + (-31.726 + 31.723) \\
&\qquad - (331.139 - 340.498) = -0.003 \text{ m}
\end{aligned}$$

وبتطبيق الضبط بطريقة مجموع أقل المربعات LSA نحصل علي النتائج التالية لهذه الشبكة الجيوديسية:

```
        Iterations = 2
      Redundancies = 15
Reference Variance = 4.075
      Reference So = ±2.019
```

Adjusted Geodetic Coordinates

Station	Latitude	Longitude	Orth height	N	S-Lat(")	S-Lon(")	S-h
A	41°18′26.04850″N	76°00′10.24860″W	372.2232	−31.72	0.000065	0.000087	0.0119
B	41°18′40.46653″N	76°00′05.50185″W	351.3904	−31.71	0.000231	0.000113	0.0120
C	41°18′22.04015″N	76°00′00.94395″W	362.8664	−31.73	0.000162	0.000270	0.0119
D	41°18′27.65788″N	76°00′31.38547″W	370.8748	−31.72	0.000304	0.000353	0.0124

Adjusted Slope Distances

Station Occupied	Station Sighted	Distance	V
A	B	458.792	−0.004
A	C	249.468	0.006
C	D	729.116	−0.006
D	A	494.213	−0.001
B	C	578.399	0.006

Adjusted Mark-to-Mark and Geodetic Distances

Station Occupied	Station Sighted	Mark-to-Mark Distance	Geodetic Distance
A	B	458.792	458.317
A	C	249.468	249.282
C	D	729.116	729.034
D	A	494.213	494.182
B	C	578.399	578.255

Adjusted Angle Observations

Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle	V(")
D	A	B	98°10′22.13″	−2.87
B	A	C	105°47′52.54″	7.54
C	A	D	156°01′45.34″	1.34
A	B	C	335°29′34.52″	−2.48
C	B	A	24°30′25.48″	6.48
B	C	D	294°19′09.93″	−7.07
D	C	A	15°59′08.09″	7.09
A	C	B	49°41′41.98″	−3.02
C	D	A	352°00′53.43″	8.43
A	D	C	7°59′06.57″	−5.43

Adjusted Azimuth Observations

Station Occupied	Station Sighted	Azimuth	V
A	B	13°56′26.9″	0.00″

Adjusted Zenith Angle Observations

Station Occupied	Station Sighted	Zenith Angle	V(")
A	B	92°36'12.2"	−0.19"
A	C	92°09'04.7"	−3.69"
C	D	89°22'25.1"	−1.05"
D	A	89°50'45.6"	−1.61"
B	C	88°52'01.3"	−0.26"

Adjusted Elevation Difference Observations

Station Occupied	Station Sighted	Elevation Diff.	V
A	C	−9.363	−0.0038

١٥-٣ ضبط شبكة متكاملة (جي بي أس + أرصاد أرضية)

في أحيان كثيرة يكون لدينا شبكة مساحية مكونة من أرصاد جي بي أس وأرصاد مساحة أرضية أيضا، وربما تكون معلومات نقاط الثوابت الأرضية control points معلومة في نظام الإحداثيات المحلي. ومن ثم فأن عملية الضبط LSA ستتم في هذا النظام مما يعني أن أرصاد الجي بي أس سيتم تحويلها من نظام الإحداثيات العالمي إلي نظام الإحداثيات المحلي مما يتطلب إدخال عناصر التحويل السبعة كقيم مجهولة أيضا في عملية الضبط ذاتها من خلال المعادلة التالية:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{IJ} \\ \Delta Y_{IJ} \\ \Delta Z_{IJ} \end{bmatrix}_2 = (1+s)R \begin{bmatrix} \Delta X_{IJ} \\ \Delta Y_{IJ} \\ \Delta Z_{IJ} \end{bmatrix}_1 \qquad (15\text{-}6)$$

حيث:

s فرق عنصر القياس scale factor بين كلا المرجعين ١، ٢

$[\ \ ]_1$ يمثل متجه فروق الإحداثيات لخطوط الجي بي أس في نظام الإحداثيات المحلي

$[\ \ ]_2$ يمثل متجه فروق الإحداثيات المرصودة لخطوط الجي بي أس

$$R = \theta_n R_n + \theta_e R_e + \theta_u R_u + I \qquad (15\text{-}7)$$

حيث:

$$R_u = \begin{bmatrix} 0 & \sin\phi_0 & -\cos\phi_0 \sin\lambda_0 \\ -\sin\phi_0 & 0 & \cos\phi_0\cos\lambda_0 \\ \cos\phi_0\sin\lambda_0 & -\cos\phi_0\cos\lambda_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos\lambda_0 \\ 0 & 0 & -\sin\lambda_0 \\ \cos\lambda_0 & \sin\lambda_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_n = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \sin\lambda_0 \\ \cos\phi_0 & 0 & \sin\phi_0 \cos\lambda_0 \\ \sin\phi_0 \sin\lambda_0 & -\sin\phi_0 \cos\lambda_0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث:

I مصفوفة الوحدة unit matrix

θ_n زاوية الدوران (بوحدات الراديان) حول محور الشمال في نظام الإحداثيات المحلي.

θ_e زاوية الدوران (بوحدات الراديان) حول محور الشرق في نظام الإحداثيات المحلي.

θ_u زاوية الدوران (بوحدات الراديان) حول محور الرأسي في نظام الإحداثيات المحلي.

ويجب ملاحظة أن عناصر مصفوفة المعاملات A لخطوط الجي بي أس يجب أيضا أن يتم دورانها لكي تصبح ملائمة لنظام الإحداثيات المحلي الذي سيتم الضبط من خلاله، ومن ثم فأن عناصر A لأي خط قاعدة IJ سيتم حسابها كالتالي:

$$\begin{aligned} &\text{For station } I: \quad -(1+s)R\,R_{XG}(\phi_i,\lambda_i)\,R_{LG}(\phi_i)^{-1} \\ &\text{For station } J: \quad (1+s)R\,R_{XG}(\phi_j,\lambda_j)\,R_{LG}(\phi_j)^{-1} \end{aligned} \qquad (15\text{-}8)$$

حيث:

$$R_{XG} = \begin{bmatrix} -(M+h)\sin\phi\sin\lambda & -(N+h)\cos\phi\sin\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ -(M+h)\sin\phi\sin\lambda & (N+h)\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ (M+h)\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{bmatrix}$$

$$R_{LG} = \begin{bmatrix} M+h & 0 & 0 \\ 0 & (N+h)\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

φ_i, λ_i دائرة العرض و خط الطول للنقطة I

φ_j, λ_j دائرة العرض و خط الطول للنقطة j

M نصف قطر التكور (الرمز c في المعادلة ٨-٢)

أما عناصر متجه الأرصاد b بالنسبة لزوايا الدوران وعنصر القياس المجهولين فستكون كالتالي:

$$b = \begin{bmatrix} X_J - X_I & r_{n_1} & r_{e_1} & r_{u_1} \\ Y_J - Y_I & r_{n_2} & r_{e_2} & r_{u_2} \\ Z_J - Z_I & r_{n_3} & r_{e_3} & r_{u_3} \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}9)$$

حيث:

$$X^T = [\Delta s\ \Delta\theta_n\ \Delta\theta_e\ \Delta\theta_u]$$

$$r_n = R_n \begin{bmatrix} X_J - X_I \\ Y_J - Y_I \\ Z_J - Z_I \end{bmatrix}$$

$$r_e = R_e \begin{bmatrix} X_J - X_I \\ Y_J - Y_I \\ Z_J - Z_I \end{bmatrix}$$

$$r_u = R_u \begin{bmatrix} X_J - X_I \\ Y_J - Y_I \\ Z_J - Z_I \end{bmatrix}$$

مثال ٣:

من المثال رقم ١ فأن الإحداثيات المحلية علي مرجع NAD83 للنقطتين المعلومتين E, B تساوي:

Station	ϕ	λ	h (m)
E	41°18′43.9622″	−76°00′29.0385″	292.354
B	41°18′40.4665″	−76°00′05.5019″	319.677
A	41°18′26.0485″	−76°00′10.2486″	—

أي أن المصفوفة R_{XG} :

$$R_{XG} = \begin{bmatrix} -(M+h)\sin\phi\sin\lambda & -(N+h)\cos\phi\sin\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ -(M+h)\sin\phi\sin\lambda & (N+h)\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ (M+h)\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{bmatrix}$$

ستكون للنقطة B كالتالي:

$$R_{XG}^{B} = \begin{bmatrix} -1016184.4632 & 4655590.8060 & 0.1817 \\ 4076156.4570 & 1160637.2558 & -0.7288 \\ 4779908.9967 & 0.0000 & 0.6601 \end{bmatrix}$$

وللنقطة E ستكون كالتالي:

$$R_{XG}^{E} = \begin{bmatrix} -1015734.7290 & 4655634.2166 & 0.1816 \\ 4076334.1775 & 1160083.8286 & -0.7288 \\ 4779818.0865 & 0.0000 & 0.6602 \end{bmatrix}$$

بينما المصفوفة R_{LG} :

$$R_{LG} = \begin{bmatrix} M+h & 0 & 0 \\ 0 & (N+h)\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ستكون للنقطة B كالتالي:

$$R_{LG}^{B} = \begin{bmatrix} 6363584.8656 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4798083.4291 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

وللنقطة E ستكون كالتالي:

$$R_{LG}^{E} = \begin{bmatrix} 6363558.6197 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 4797991.7099 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

وبدمج القياسات من جدول المثال ١ مع خطوط قواعد الجي بي أس فأن مصفوفة جاكوب J ستتكون من ٢٥ عمود حيث ستكون القيم المجهولة X هي: dX_A , dY_A , dZ_A , dX_B, dY_B, dZ_B, ... dZ_D, dX_E, dY_E, dZ_E, ... s, θ_n, θ_e, θ_u

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & \cdots & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة A (المعادلة ١٥-٨) كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1597 & 0.9703 & 0.1817 & 0.1596 & -0.9703 & -0.1816 \\ 0.6405 & -0.2419 & -0.7288 & -0.6406 & 0.2418 & 0.7288 \\ 0.7511 & 0.0000 & 0.6601 & -0.7511 & 0.0000 & -0.6601 \end{bmatrix}$$

أما جزء مصفوفة المعاملات المناظر لعناصر التحويل (المعادلة ١٥-٩) فستكون:

$$B = \begin{bmatrix} 553.4271 & -72.9412 & 15.2308 & -17.2421 \\ 43.4106 & 405.6700 & -61.1002 & -376.7564 \\ -62.9699 & -361.3992 & 91.7378 & -411.2673 \end{bmatrix}$$

وباستخدام المعادلة (٨-٢) فأن الإحداثيات الكارتيزية المركزية (أو العالمية) للنقطتين المعلومتين E, B ستكون كالتالي:

Station	X (m)	Y (m)	Z (m)
E	1,160,083.830	−4,655,634.217	4,188,722.346
B	1,160,637.257	−4,655,590.805	4,188,659.377

وسيكون متجه المتبقيات b لخط القاعدة هذا كالتالي:

$$b = \begin{bmatrix} 553.430 - (1160637.257 - 1160083.830) \\ 43.400 - (-4655590.805 + 4655634.217) \\ -62.949 - (4188659.377 - 4188722.346) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.003 \\ -0.012 \\ 0.020 \end{bmatrix}$$

ومن ثم يمكن استكمال خطوات ضبط LSA بالطريقة العادية.

١٥-٤ ضبط شبكة أرصاد الجاذبية الأرضية

تعد شبكات الجاذبية الأرضية terrestrial gravity networks من أهم أنواع شبكات الثوابت الأرضية أو شبكات التحكم الجيوديسية، حيث يتم إنشاء مجموعة من نقاط الثوابت الأرضية المعلوم لكلا منها قيم: خط الطول، دائرة العرض، المنسوب، قيمة الجاذبية الأرضية gravity. فقياس ومعرفة قيمة الجاذبية الأرضية له تطبيقات علمية عديدة في مجالات الجيوفيزياء (علوم الأرض) والبحث عن الموارد الطبيعية. وفي المساحة الجيوديسية فأن قيمة حيود الجيويد geoid undulation (أو الفرق بين الجيويد و الاليبسويد) يمكن استنباطها من قيم الجاذبية الأرضية.

من وجهة نظر رياضية فأن أرصاد الجاذبية الأرضية تشبه أرصاد الميزانية حيث يتم قياس فرق الجاذبية بين كل نقطتين (الجاذبية النسبية relative gravity) كما في حالة قياس فرق المنسوب بين كل نقطتي ميزانية، وبمعرفة قيمة الجاذبية المطلقة absolute gravity لنقطة واحدة علي الأقل يمكن حساب قيم الجاذبية لجميع نقاط الشبكة. لكن تختلف معادلات الرصد في شبكات الجاذبية الأرضية عن معادلات رصد شبكات الميزانية في وجود عدد من القيم المنتظمة systematic parameters المطلوب حسابها أيضا أثناء عملية الضبط. فجهاز الجاذبية الأرضية gravity meter يعطي قراءاته المباشرة بوحدات خاصة به وليس بوحدات المللي جال milliGal المستخدمة في قياس الجاذبية الأرضية. كما أن هذه النوعية من الأجهزة تكون لها معدل تغير drift يعتمد علي نوع الجهاز ذاته، بمعني أن هذا التغير يختلف من جهاز إلي آخر وزن ثم فيجب اعتباره أحد القيم المجهولة في عملية ضبط الأرصاد. أيضا فأن لكل جهاز تصحيح لزمن القياس نفسه، حيث أن الزمن المستغرق لقياس فرق الجاذبية بين النقطة المعلومة و النقطة الجديدة يؤثر في جودة القياس ذاته. وفي حالة استخدام أكثر من جهاز قياس جاذبية في نفس الشبكة فسيكون هناك عدة معدلات تغير وعدة تصحيحات زمنية يجب أخذها في الاعتبار. ومن هنا أن معادلات أرصاد الجاذبية الأرضية تختلف في طبيعتها و تكوينها عن معادلات أرصاد الميزانية مع أن كلاهما معادلات أحادية البعد one-dimensional.

الصورة العامة لمعادلات أرصاد الجاذبية الأرضية النسبية تأخذ الشكل التالي:

$$r_{j,k,l} = g_j - O_{k,l} + Z_{j,l,k} \,.\, e_{k,l} + \Delta t_{i,j,k,l} \,.\, d_{k,l} \qquad (15\text{-}9)$$

حيث:

- i النقطة المرصودة في مجموعة رصد محددة
- j النقطة المعلومة في مجموعة رصد محددة
- k جهاز الجاذبية الأرضية
- l حلقة الرصد data series في الشبكة
- $r_{j,k,l}$ قراءة الجهاز الأصلية (المرصودة) للجهاز k عند النقطة j في حلقة الرصد l
- g_j قيمة الجاذبية الأرضية للنقطة j
- $O_{k,l}$ قيمة تعبر عن ثابت تحويل وحدات الجهاز إلي وحدات الجاذبية الأرضية
- $Z_{j,l,k}$ قراءة الجهاز الأصلية (بوحدات الجهاز)
- $e_{k,l}$ خطأ ثابت تحويل وحدات قراءة الجهاز إلي وحدات الجاذبية الأرضية (أو معامل المعايرة لكل جهاز)

$\Delta t_{i,j,k,l}$ فرق الزمن بين النقطة المرصودة j والنقطة المعلومة i للجهاز رقم k في حلقة الرصد رقم l

$d_{k,l}$ معدل التغير drift للجهاز k في حلقة الرصد l

أما معادلات أرصاد الجاذبية الأرضية المطلقة فتأخذ الشكل التالي:

$$r_{j,k,l}\,(abs) = g_j\,(abs) - O_{k,l} + Z_{j,l,k}\ .\ e_{k,l} + \Delta t_{i,j,k,l}\ .\ d_{k,l} \qquad (15\text{-}10)$$

حيث:

$r_{j,k,l}\,(abs)$ قراءة الجهاز الأصلية (المرصودة) للجهاز k عند نقطة الجاذبية الأرضية المطلقة j في حلقة الرصد l

$g_j\,(abs)$ قيمة الجاذبية الأرضية المطلقة للنقطة j

وبتحويل معادلات الأرصاد السابقة إلي معادلة متبقيات residuals تنتج لنا:

$$v_{j,k,l} = g_j - O_{k,l} + Z_{j,l,k}\ .\ e_{k,l} + \Delta t_{i,j,k,l}\ .\ d_{k,l} - r_{j,k,l} \qquad (15\text{-}11)$$

والتي يمكن وضعها في صورة مصفوفات كالتالي:

$$V_{n,l} = A_{n,n}\, X_{m,1} - b_{n,1} \qquad (15\text{-}12)$$

حيث:

n عدد الأرصاد

m عدد القيم المجهولة

$V_{n,1}$ متجه المتبقيات

Xm,1 متجه القيم المجهولة التي تشمل: قيمة الجاذبية الأرضية لكل نقطة مرصودة و قيم ثوابت التحويل O وقيم معدلات التغير d وقيم معاملات المعايرة e لكل جهاز مستخدم.

ومن ثم يمكن تطبيق مبدأ الضبط بمجموع أقل المربعات (المعادلة ١١-٤) لضبط شبكات الجاذبية الأرضية.

الفصل السادس عشر

تحليل نتائج ضبط الشبكات

١٦-١ مقدمة

من أهم متطلبات الوصول إلي نتائج جيدة لحسابات و ضبط الشبكات الجيوديسية (مثل شبكات الجي بي أس) التحليل الدقيق الفاحص المتمعن للنتائج التي يقدمها لنا برنامج software الحسابات و الضبط. فبعض المبتدئين في مجال الهندسة المساحية يكون لديهم ثقة عمياء في برامج الكمبيوتر ليتخيل كلا منهم أن نتائج البرنامج دقيقة تماما ويجب اعتمادها فورا دون أية خطوات أخري ! ولكن يجب إعادة الجملة الواردة في تقديم هذا الكتاب وهي أن ***"الهندسة المساحية علم وليست مجرد تقنية"***، ومن ثم فهناك قواعد و أسس علمية يجب إتباعها في فحص النتائج التي نحصل عليها من أية برامج كمبيوتر أو أية أجهزة تقنية مهما كانت هذه البرامج والأجهزة متقدمة و غالية السعر.

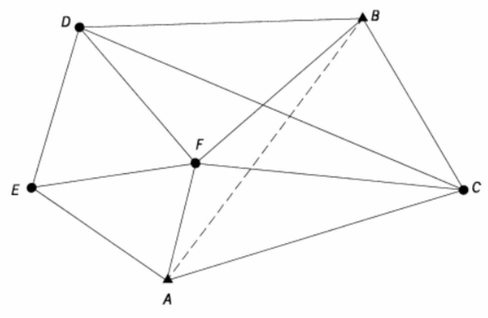
١٦-٢ تحليل نتائج حسابات الشبكات

توجد عدة خطوات لفحص و تحليل نتائج حسابات أرصاد و شبكات الجي بي أس GPS processing ، وعادة فأن معظم البرامج التجارية software تقدم هذه النتائج للمستخدم في تقرير الحسابات processing report ليقوم بفحصها بنفسه في محاولة لاكتشاف وجود أية أخطاء قبل المضي قدما في ضبط الشبكة.

١٦-٢-١ تحليل أرصاد الخطوط الثابتة

عادة في شبكات الجي بي أس فيكون هناك نقطتين (أو أكثر) من نقاط التحكم الأرضية control points المعلومة الإحداثيات، وباحتلال هذه النقاط يكون لدينا أرصاد خطوط قواعد baselines بينهم. وبمقارنة الخطوط المرصودة بين نقاط التحكم (الناتجة من برنامج الحساب) وقيمها المعلومة مسبقا يكون لدينا وسيلة لتقييم جودة أسلوب العمل الذي اتبعناه في الرصد الحقلي وأيضا تقييم الإحداثيات المعلومة لهذه النقاط. فكلما كانت الفروق قليلة كلما كان ذلك أفضل، وفي حالة الفروق الكبيرة يجب فحص الأرصاد و أسلوب الحساب قبل المضي قدما في ضبط الشبكة.

في الشبكة التالية تم رصد الخطوط الموضحة فكانت نتائج حسابات الجي بي أس كما هو موضح بالجدول التالي:



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
From	To	ΔX	ΔY	ΔZ	Covariance Matrix Elements					
A	*C*	11,644.2232	3,601.2165	3,399.2550	9.884E-4	−9.580E-6	9.520E-6	9.377E-4	−9.520E-6	9.827E-4
A	*E*	−5,321.7164	3,634.0754	3,173.6652	2.158E-4	−2.100E-6	2.160E-6	1.919E-4	−2.100E-6	2.005E-4
B	*C*	3,960.5442	−6,681.2467	−7,279.0148	2.305E-4	−2.230E-6	2.070E-6	2.546E-4	−2.230E-6	2.252E-4
B	*D*	−11,167.6076	−394.5204	−907.9593	2.700E-4	−2.750E-6	2.850E-6	2.721E-4	−2.720E-6	2.670E-4
D	*C*	15,128.1647	−6,286.7054	−6,371.0583	1.461E-4	−1.430E-6	1.340E-6	1.614E-4	−1.440E-6	1.308E-4
D	*E*	−1,837.7459	−6,253.8534	−6,596.6697	1.231E-4	−1.190E-6	1.220E-6	1.277E-4	−1.210E-6	1.283E-4
F	*A*	−1,116.4523	−4,596.1610	−4355.9062	7.475E-5	−7.900E-7	8.800E-7	6.593E-5	−8.100E-7	7.616E-5
F	*C*	10,527.7852	−994.9377	−956.6246	2.567E-4	−2.250E-6	2.400E-6	2.163E-4	−2.270E-6	2.397E-4
F	*E*	−6,438.1364	−962.0694	−1,182.2305	9.442E-5	−9.200E-7	1.040E-6	9.959E-5	−8.900E-7	8.826E-5
F	*D*	−4,600.3787	5,291.7785	5,414.4311	9.330E-5	−9.900E-7	9.000E-7	9.875E-5	−9.900E-7	1.204E-4
F	*B*	6,567.2311	5,686.2926	6,322.3917	6.643E-5	−6.500E-7	6.900E-7	7.465E-5	−6.400E-7	6.048E-5
B	*F*	−6,567.2310	−5,686.3033	−6,322.3807	5.512E-5	−6.300E-7	6.100E-7	7.472E-5	−6.300E-7	6.629E-5
A	*F*	1,116.4577	4,596.1553	4,355.9141	6.619E-5	−8.000E-7	9.000E-7	8.108E-5	−8.200E-7	9.376E-5
A[a]	*B*	7,683.6883	10,282.4550	10,678.3008	7.2397E-4	−7.280E-6	7.520E-6	6.762E-4	−7.290E-6	7.310E-4

فإذا كانت نقطتي A, B نقاط ثوابت أرضية فيمكننا إجراء مقارنة بين المركبات ΔX, ΔY, ΔZ, للخط AB المرصود measured وقيمها المعلومة المناظرة fixed وحساب الفروق في كل مركبة. ثم نقوم بحساب الخطأ النسبي بقسمة الفرق علي طول الخط بوحدات ppm (جزء في المليون part per million) كما في الجدول التالي. فمثلا الخطأ النسبي في ΔX = قيمة الفرق ٠.٠٠٧٤ متر ÷ ١٦٦٩٧ متر (طول الخط AB) × مليون = ٠.٤٤ جزء من المليون، وهكذا للمركبتين الأخيرتين:

(1) Component	(2) Measured (m)	(3) Fixed (m)	(4) Difference (m)	(5) ppm[a]
ΔX	7,683.6883	7,683.6809	0.0074	0.44
ΔY	10,282.4550	10,282.4537	0.0013	0.08
ΔZ	10,678.3008	10,678.3058	0.0050	0.30

فإذا كانت الدقة النسبية المطلوبة لهذا المشروع (أو هذه الشبكة) تبلغ ١ في المليون علي سبيل المثال (طبقا لمواصفات المشروع) فسنجد أن قيم الخطأ النسبي في الجدول السابق أقل من الحدود المسموح بها، مما يعطينا مؤشر مبدئي علي جودة أرصاد هذه الشبكة.

١٦-٢-٢ تحليل أرصاد الخطوط المرصودة أكثر من مرة

تتضمن مواصفات الشبكات الجيوديسية الدقيقة ضرورة رصد ما لا يقل عن ١٠% من عدد خطوط القواعد أكثر من مرة (وقد يصل الرقم إلي ٥٠% لشبكات الدرجة الأولي). ومن هنا فأن مقارنة حسابات هذه الخطوط متكررة الرصد تفيد أيضا في الحكم علي جودة الأرصاد. ففي جدول أرصاد الشبكة السابقة سنجد أن الخط AF والخط BF قد تم رصد كلا منهما مرتين، والجدول التالي يوضح مقارنة نتائج حسابات هاتين المرتين:

Component	First Observation	Second Observation	Difference (m)	ppm
ΔX_{AF}	1116.4577	−1116.4523	0.0054	0.84
ΔY_{AF}	4596.1553	−4596.1610	0.0057	0.88
ΔZ_{AF}	4355.9141	−4355.9062	0.0079	1.23
ΔX_{BF}	−6567.2310	6567.2311	0.0001	0.01
ΔY_{BF}	−5686.3033	5686.2926	0.0107	1.00
ΔZ_{BF}	−6322.3807	6322.3917	0.0110	1.02

وكما نري فأن الخطأ النسبي ppm لفروق المركبات لمرتي الرصد لكل خط في حدود ١ جزء من المليون، مما يعطي مؤشرا أخر علي جودة وتماسك consistency أرصاد الشبكة.

١٦-٢-٣ تحليل خطأ قفل الحلقات

عادة فأن أرصاد الجي بي أس تنتج حلقات مغلقة closed loops سواء في شكل مثلثات أو أشكال مغلقة أخري. ففي الشبكة السابقة نجد عدة حلقات مغلقة مثل: ACBDEA, ACFA, CFBC, BDFB ... وهكذا. وفي كل حلقة مغلقة فأن مجموع أي مركبة (من المركبات الثلاثة) يجب أن يساوي الصفر. ومن هنا يمكن حساب خطأ القفل لكل حلقة loop misclosure لكل مركبة. فعلي سبيل المثال للحلقة ACBDA :

$$C_X = \Delta X_{AC} + \Delta X_{CB} + \Delta X_{BD} + \Delta X_{DE} + \Delta X_{EA}$$
$$C_Y = \Delta Y_{AC} + \Delta Y_{CB} + \Delta Y_{BD} + \Delta Y_{DE} + \Delta Y_{EA}$$
$$C_Z = \Delta Z_{AC} + \Delta Z_{CB} + \Delta Z_{BD} + \Delta Z_{DE} + \Delta Z_{EA}$$

وبالتعويض بقيم مركبات خطوط هذه الحلقة نجد أن:

$$C_X = 11644.2232 - 3960.5442 - 11167.6076 - 187.7459 + 5321.7164 = 0.0419m$$
$$C_Y = 3601.2165 + 6681.2467 - 394.5204 - 6253.8534 - 3634.0754 = 0.0140m$$
$$C_Z = 3399.2550 + 7279.0148 - 907.9593 - 6596.6697 - 3173.6652 = -0.0244m$$

ثم نحسب خطأ قفل الحلقة ذاتها كالتالي:

$$C_{loop} = \sqrt{C_X^2 + C_Y^2 + C_Z^2} = \sqrt{(0.0419)^2 + (0.0140)^2 + (-0.0244)^2} = 0.0505m$$

ونحوله إلي خطأ نسبي ppm (بالطريقة السابقة) بقسمته علي مجموع أطوال خطوط الحلقة المغلقة (والبالغ ٥٠٩٦٧ متر) ليصبح = ٠.٠٥٠٥ ÷ ٥٠٩٦٧ × مليون = ٠.٩٩ ppm أو جزء في المليون. وعادة ما تحدد المواصفات الجيوديسية لكل دولة (مثل المواصفات المساحية الأمريكية FGCS) القيم المقبولة لأخطاء الحلقات المغلقة في شبكات الجي بي أس طبقا لدرجة order كل شبكة.

١٦-٣ تحليل نتائج ضبط الشبكات

١٦-٣-١ أنواع ضبط الشبكات

لكل شبكة مساحية أو جيوديسية عيوب تسمي عيوب المرجع datum defects لافتقار الشبكة إلي التحديد المرجعي الثابت لمكانها أو مرجعها علي سطح الأرض. ومن وجهة نظر رياضية فأن الشبكة التي بها عيوب المرجع لا يمكن إيجاد مقلوبة مصفوفة $(A^TWA)^{-1}$ لها ومن ثم فلن يمكن حل المعادلة (١١-٤). فإذا أخذنا مثلا شبكة الميزانية فسنجد أن الأرصاد تتكون من فروق المناسيب ΔH لكل خط، أي لا يوجد قيمة مطلقة لمنسوب نقطة في الشبكة ومن هنا فلن يمكننا حساب مناسيب نقاط الشبكة. وفي هذا المثال نقول أن هذه الشبكة تعاني من عدد ١ عيب مرجع يتمثل في عنصر انتقال translation يحدد لنا مرجعا مطلقا لهذه الأرصاد النسبية، أو بمعني أخر فأن هذه الشبكة لا بد أن يكون بها نقطة واحدة تحدد قيمة المنسوب H (المرجع للشبكة) لكي نتمكن من حساب مناسيب باقي نقاط الشبكة. وكمثال آخر فأن عدد عيوب المرجع للشبكة الجيوديسية الأفقية مقاسة الأضلاع فقط يبلغ ٣ عيوب: ٢ عيب انتقال و عيب دوران. أي أن هذه الشبكة تحتاج لمعرفة القيم المطلقة للإحداثيات الأفقية X,Y لنقطة واحدة وأيضا معرفة انحراف واحد مقاس في هذه الشبكة (لاحظ أن هذا النوع من الشبكات لا يوجد به عيب عنصر القياس حيث أن جميع خطوط الشبكة تكون أطوالها مقاسة). أما الشبكة الأفقية مقاسة الزوايا فيزيد عدد عيوب المرجع بها إلي ٤ حيث يضاف عنصر القياس بما أن هذا النوع من الشبكات لا يوجد به أية مسافات مقاسة. ومن ثم فأن الشبكة المساحية الأرضية ثلاثية الأبعاد (في صورتها العامة) يبلغ عدد عيوب المرجع بها ٧ عيوب: ٣ انتقال (أي أنها تتطلب معرفة الإحداثيات الثلاثية X,Y,Z لنقطة واحدة علي الأقل) + ٣ عيوب دوران (أي أنها تتطلب قياس انحراف أحد الخطوط) + ١ عنصر قياس (أي أنها تتطلب قياس مسافة واحدة علي الأقل). فان تم قياس طول خط واحدة في الشبكة ينتفي وجود عيب عنصر القياس scale لينخفض عدد عيوب المرجع من ٧ إلي ٦.

نوع الشبكة	عيوب المرجع	
	العدد	النوع
شبكات الميزانية	١	١ انتقال translation
شبكات أفقية مقاسة الأضلاع Trialateration	٣	٢ انتقال + ١ دوران rotation
شبكات أفقية مقاسة الزوايا Triangulation	٤	٢ انتقال + ١ دوران + ١ عنصر قياس scale
شبكات أرضية ثلاثية الأبعاد 3D	٦ أو ٧	٣ انتقال + ٣ دوران + (أحيانا) ١ عنصر قياس
شبكات الجي بي أس	٣	٣ انتقال

أما شبكات الجي بي أس فأن عيوب المرجع بها تبلغ ٣ فقط وهم عيوب الانتقال، فشبكة الجي بي أس لا تعاني من أية عيوب دوران حيث أن انحراف كل خط قاعدة يمكن حسابه من مركبات الخط $\Delta Y,\Delta X$ ، كما أنها لا تعاني من عيب عنصر القياس حيث أن طول كل خط قاعدة يمكن حسابه أيضا من المركبات المعلومة. إذن لا يوجد إلا تحديد الإحداثيات المطلقة X,Y,Z لنقطة واحدة من نقاط الشبكة لكي نتمكن من حساب إحداثيات جميع نقاطها.

ومن هنا ننتقل إلي أنواع ضبط الشبكات Network Adjustment فنجد أن لدينا ثلاثة أنواع من أنواع الضبط:

١. الضبط باستخدام أقل عدد من القيود minimal-constrained adjustment (ويسمي أيضا الضبط غير المشروط un-constrained adjustment)

٢. الضبط باستخدام عدد أكبر من اللازم من القيود over-determined adjustment

٣. الضبط المقيد نسبيا أو الضبط باستخدام القيم الثابتة نسبيا partially or semi-constrained adjustment

ففي النوع الأول نقوم بمعالجة عيوب مرجع الشبكة من خلال تثبيت العدد الفعلي minimal اللازم من القيم المعلومة، فشبكة الجي بي أس تعاني من عدد ٣ عيوب مرجع فهي تحتاج فقط إلي تثبيت ٣ قيم إحداثيات مطلقة X,Y,Z . أي أننا فرضنا علي أرصاد الشبكة عدد ٣ قيود constraints لجعل نقطة واحدة من نقاط الشبكة لها إحداثيات ثابتة fixed (وهي التي سيتم الاعتماد عليها في حساب إحداثيات باقي نقاط الشبكة). ويجب الانتباه إلي أن القيم الثابتة fixed لن تأخذ أيه تصحيحات residuals في عملية الضبط، بمعني أن قيمها الأصلية ستظل كما هي ودون أية تغييرات بعد انتهاء عملية الضبط. ولإتمام تثبيت العدد الفعلي من القيود فهناك اختيارين: إما أن يقوم المستخدم بعطاء البرنامج قيم X,Y,Z معلومة للنقطة المطلوب تثبيتها، أو أن يختار البرنامج احدي النقاط (غالبا ما تكون نقطة المركز الهندسي للشبكة centroid) ويقوم بتثبيت إحداثياتها التقريبية الناتجة من أرصاد الجي بي أس (تقنية الجي بي أس تستطيع حساب إحداثيات تقريبية للنقاط المرصودة بدقة في حدود عدة أمتار). والأسلوب الأخير يطلق عليه اسم ضبط الشبكة الحرة free-net adjustment. لكن في كلا الأسلوبين فأن الضبط سيتم بالعدد الفعلي اللازم لمعالجة عيوب الشبكة، أي أن عملية الضبط ستعتمد فقط علي الأرصاد الحقلية. ومن هنا فأن نتائج هذا الضبط ستكون مؤشرا للمصداقية الداخلية internal reliability لأرصاد الشبكة.

أما النوع الثاني من أنواع الضبط فيتم بفرض عدد من القيود أكبر من العدد الفعلي اللازم لمعالجة عيوب المرجع. فإذا قمنا بتثبيت نقطتين مثلا (أي تثبيت ٦ عناصر $X_1,Y_1,Z_1,$ X_2,Y_2,Z_2) فنحن بذلك قد أجبرنا البرنامج علي أن يجعل طول خط القاعدة بين هاتين النقطتين ثابتا، أي لن يناله أيه تصحيحات. ومن المفترض ألا نلجأ لهذا النوع من الضبط إلا في حالة توافر قيم دقيقة بالفعل لإحداثيات النقاط المعلومة (الثابتة)، وتكون دقة هذه الإحداثيات تعادل دقة أرصاد الجي بي أس ذاتها. ففي حالة أن الطول المحسوب (من إحداثيات النقطتين) لهذا الخط غير دقيق، فأن الخطأ الموجود به سينتقل إلي باقي خطوط القواعد في الشبكة، مما سيؤثر علي جودة نتائج الضبط. وفي هذه الحالة فأن نتائج الضبط لن تكون معبرة فقط عن المصداقية الداخلية للشبكة (أي جودة الأرصاد) بل ستعتمد أيضا علي جودة و دقة العناصر الثابتة.

يعد النوع الثالث حالة خاصة من النوع الثاني حيث أننا نتحكم في جودة القيم المطلوب تثبيتها، فبدلا من افتراض أن هذه القيم دقيقة تماما فنحن نحدد مستوي دقة معين لها. فمثلا عند تثبيت إحداثيات نقطتين نحدد دقة هذه الإحداثيات (الخطأ المعياري لها) بحيث أن عملية الضبط تستطيع تصحيح هذه الإحداثيات في مستوي الدقة المطلوب أو المحدد لها. ومن ثم فأن هذه النقاط لم تعد ثابتة تماما completely fixed بل أنها تعد ثابتة نسبيا partially fixed.

وبناءا عليه فأن ضبط الشبكات المساحية أو الجيوديسية يجب أن يبدأ بالضبط بأقل عدد من القيود (أو ضبط الشبكة الحرة) لاستخدام النتائج في فحص و تحليل جودة و مصداقية الأرصاد الحقلية ذاتها واكتشاف أيه أرصاد شاذة قد تكون مؤثرة علي بقيمة الأرصاد (أنظر الجزء التالي). وبعد التأكد من جودة أرصاد الشبكة يتم الانتقال إلي النوع الثاني أو النوع الثالث من أنواع الضبط للحصول علي القيم النهائية لإحداثيات نقاط الشبكة.

١٦-٣-٢ التحليل الإحصائى مربع كاي

تم الإشارة إلي هذا التحليل في الفصل الحادي عشر كأحد التحليلات الإحصائية العامة لبيان احتمال وجود أغلاك أو أخطاء كبيرة gross errors بناءا علي تحليل نتائج ضبط الأرصاد أو الشبكات. وعادة ما يتم اختبار قيمة $\sum w_i v_i^2$ باستخدام جداول الاختبار الإحصائي "مربع كاي χ^2" عند درجة الحرية المطلوبة (أي قيمة m-n حيث n عدد الأرصاد و m عدد القيم المجهولة) وذلك عند مستوي خطأ عادة يساوي ٥% (أو ٠.٠٥) كما في الجدول التالي. فان كانت قيمة $\sum w_i v_i^2$ أقل من قيمة الجدول (عند الصف m-n والعمود ٠.٠٥) فهذا يدل علي عدم وجود أغلاط في الأرصاد وعلي أن الأوزان المستخدمة في عملية الضبط مناسبة لدقة مجموعة الأرصاد ذاتها.

Degrees of freedom (m−n) درجة الحرية	*Probability* الاحتمال			
	0.10	0.05	0.02	0.01
1	1.64	1.96	2.33	2.58
2	1.52	1.73	1.98	2.15
3	1.44	1.61	1.81	1.94
4	1.39	1.54	1.71	1.82
5	1.36	1.49	1.64	1.74
6	1.33	1.45	1.58	1.67
8	1.29	1.39	1.51	1.58
10	1.26	1.35	1.45	1.52
12	1.24	1.32	1.42	1.48
15	1.22	1.29	1.37	1.43
20	1.19	1.25	1.32	1.37
40	1.14	1.18	1.23	1.26
100	1.09	1.12	1.15	1.17

١٦-٣-٣ اكتشاف الأرصاد الشاذة

الأرصاد الشاذة أو الأرصاد الواقعة خارج الحدود outliers or blunders هي أرصاد ليست ذات مستوي جيد من الدقة و المصداقية يتناسب مع المستوي العام لجودة مجموعة الأرصاد في الشبكة، ومن هنا جاء اسمها لأنها " تقع خارج out lay " المستوي العام لمصداقية الشبكة. وأهم مشاكل هذا النوع من الأرصاد أن رصده واحدة قد تؤثر بشكل كبير علي باقي أرصاد الشبكة وعلي الدقة العامة لضبط الشبكة. ومن هنا فمن الضروري اكتشاف هذه الأرصاد الشاذة و حذفها (من مجموعة الأرصاد) وإعادة عملية الضبط مرة أخري.

هناك عدة طرق رياضية و إحصائية لتعريف و اكتشاف الأرصاد الشاذة بناءا علي تحليل نتائج ضبط الشبكة في أول مرة. ومن هذه الطرق ما يعرف باسم المتبقيات القياسية standardized residuals :

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}} \qquad (16\text{-}1)$$

حيث:

$\bar{v}_i$ المتبقي القياسي
v_i المتبقي المحسوب
q_{ii} العنصر القطري في مصفوفة التباين-الترابط للمتبقيات:

$$Q_{vv} = W^{-1} - AQ_X A^T \qquad (16\text{-}2)$$

حيث:

W^{-1} مقلوب مصفوفة الوزن
Q_X مصفوفة التباين-الترابط للقيم المجهولة
A مصفوفة المعاملات

وبعد حساب قيمة المتبقي القياسي لكل رصده (١٦-١) يتم مقارنة حاصل قسمته علي الخطأ المعياري للرصدة ذات الوزن الواحد σ_o (من المعادلة ١١-٧) مع القيمة الناتجة من الاختبار الإحصائي t كالتالي:

$$t_i = \bar{v}_i / \sigma_o \qquad (16\text{-}3)$$

فان زادت قيمة t_i المحسوبة من المعادلة السابقة عند قيمة حدود الرفض عند مستوي ثقة محدد فأن هذه الرصدة تكون رصده شاذة outlier. فعلي سبيل المثال فأن قيمة حدود الرفض عند مستوي الثقة ٩٥% (أي مستوي الخطأ ٥%) تساوي ٢.٨ (البعض أيضا يستخدم القيمة ٣.٢٩)، فإذا كانت قيمة t_i لأي رصده في الشبكة أكبر من ٢.٨ فهذا يدل علي أن هذه الرصدة هي بالفعل رصده شاذة. كما تجدر الإشارة لوجود طريقة أخري من طرق اكتشاف الأخطاء الشاذة وتعتمد علي مقارنة ناتج $\bar{v}_i / \sigma_o$ مع جداول الاختبار الإحصائي τ (اختبار تاو) عند مستوي الثقة المطلوب ودرجة الحرية المحددة. ومعادلة هذا الاختبار الإحصائي يمكن برمجتها بسهولة مما جعله مناسبا لبرامج الكمبيوتر.

تتم عملية اكتشاف و حذف الأرصاد الشاذة بحرص، حيث أن وجود رصده شاذة قد يؤثر علي عدد من الأرصاد الأخرى السليمة أو الجيدة في الشبكة. فعند إتمام الضبط الأول وحساب قيم الاختبار الإحصائي t_i لكل رصده فأننا لا نحذف جميع الأرصاد التي تزيد علي حدود الرفض بل نحذف فقط الرصده التي لها أكبر قيمة ti. ثم نعيد عملية الضبط مرة أخري، .... وهكذا إلي أن نصل للحالة التي لا يوجد بها أية أرصاد شاذة في الشبكة فتكون نتائج هذا الضبط هي النتائج

النهائية للضبط بأقل عدد من القيود minimal-constrained adjustment ويمكننا حينئذ الانتقال إلي النوع الثاني أو النوع الثالث من أنواع الضبط.

وهذا الأسلوب هام جدا حيث أن وجود رصده شاذة واحدة فقط قد يكون مؤثرا علي عدة أرصاد أخري لتظهر كما لو كانت أرصاد شاذة أيضا، ومن ثم فأن حذف الرصده ذات أكبر قيمة t_i قد يعيد بقية الأرصاد الأخرى إلي جودتها الأصلية. ولنأخذ مثالا للدلالة علي أهمية إتباع هذا الأسلوب في حذف الأرصاد الشاذة: في مثال الترافرس المغلق المذكور بالفصل الثالث عشر (أنظر ١٣-٥) سنقوم بإدخال خطأ متعمد علي الزاوية ABE فبدلا من قيمتها الحقيقية المرصودة ٢٩" ٠٢' ٥٣° سنجعلها تساوي ٢٩" ٠٢' ٣٥° ثم سنعيد خطوات الضبط لنحصل علي النتائج التالية:

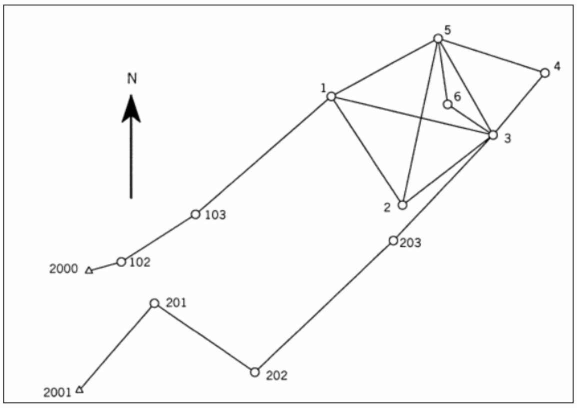
Observation		Residual v	Standard error of residual σ_v	t_i
Angles	*ABE*	51662″	4.5″	11571
	EBC	−1242″	4.0″	−312
	BCD	−322″	3.8″	−84
	DEB	−3075″	3.7″	−821
	BEA	4477″	4.5″	988
Distance	*AB*	6.92 m	0.0028 m	2463
	AE	−16.73 m	0.0020 m	−8455
	BC	2.12 m	0.0027 m	784
	BE	8.97 m	0.0018 m	5080
	CD	1.11 m	0.0013 m	889
	DE	0.31 m	0.0013 m	236

ومن هذه النتائج نري أن قيمة t_i لجميع الأرصاد قد تعدت حدود الرفض، أي أن جميع الأرصاد (وليس فقط الزاوية ABE) قد أصبحت أرصاد شاذة. وفي هذه الحالة يجب حذف الرصدة صاحبة أكبر قيمة t_i فقط (وهي كما نري الزاوية ABE التي لها قيمة ١١٥٧١).

وتجدر الإشارة إلي أن كل البرامج التجارية لضبط الشبكات adjustment software (وخاصة برامج الجي بي أس) لديها إمكانية إجراء هذا الاختبار الإحصائي وإعطاء نتائجه في تقرير الضبط. أي أن المستخدم المتخصص في الهندسة المساحية ما عليه إلا تحليل و فحص نتائج عملية الضبط لاكتشاف وجود أرصاد شاذة outlier or blunders وحذفها و إعادة الضبط مرة أخري للحصول علي أفضل و أدق النتائج.

مثال ١:

الشكل التالي يمثل شبكة مساحية أرضية لإنشاء مجموعة من نقاط الثوابت الأرضية اعتمادا علي النقطتين ٢٠٠٠ و ٢٠٠٠١ معلومتي الإحداثيات:



وكانت الأرصاد المقاسة (الزوايا و المسافات) وقيم الإحداثيات المعلومة كالتالي:

Control stations

Station	Northing	Easting
2000	419,710.09	2,476,334.60
2001	419,266.82	2,476,297.98

Angle observations

Backsight	Occupied	Foresight	Angle	σ (″)
102	2000	2001	109°10′54.0″	25.5
2000	102	103	162°58′16.0″	28.9
102	103	1	172°01′43.0″	11.8
2000	2001	201	36°04′26.2″	7.4
2001	201	202	263°54′18.7″	9.7
201	202	203	101°49′55.0″	8.1
202	203	3	176°49′10.0″	8.4
203	3	2	8°59′56.0″	6.5
2	1	3	316°48′00.5″	6.3
3	5	4	324°17′44.0″	8.1
6	5	3	338°36′38.5″	10.7
1	5	3	268°49′32.5″	9.8
2	5	3	318°20′54.5″	7.0
2	3	1	51°07′11.0″	7.2
2	3	5	98°09′36.5″	10.3
2	3	6	71°42′51.5″	15.1
2	3	4	167°32′28.0″	14.5

Distance observations

From	To	Distance	σ
2001	201	425.90	0.022
201	202	453.10	0.022
202	203	709.78	0.022
203	3	537.18	0.022
5	3	410.46	0.022
5	4	397.89	0.022
5	6	246.61	0.022
5	1	450.67	0.022
5	2	629.58	0.022
3	2	422.70	0.022
3	1	615.74	0.022
3	5	410.44	0.022
3	6	201.98	0.022
3	4	298.10	0.022
1	2	480.71	0.022
1	3	615.74	0.022
2000	102	125.24	0.022
102	103	327.37	0.022
103	1	665.79	0.022

وتتمثل نتائج عملية الضبط الأولي (خاصة قيم المتبقيات المحسوبة residuals و المتبقيات القياسية standard residuals) للمسافات في الجدول التالي:

**** Adjusted Distance Observations ****

No.	From	To	Distance	Residual	Std. Res.
1	1	3	616.234	0.494	26.148
2	1	2	480.943	0.233	12.926
3	1	3	616.234	0.494	26.148
4	**3**	**4**	**267.044**	**−31.056**	**−1821.579**
5	3	6	203.746	1.766	107.428
6	3	5	413.726	3.286	171.934
7	3	2	422.765	0.065	3.500
8	5	2	630.949	1.369	75.909
9	5	1	449.398	−1.272	−79.651
10	5	6	247.822	1.212	75.418
11	5	4	407.125	9.235	631.032
12	5	3	413.726	3.266	170.888
13	102	103	327.250	−0.120	−17.338
14	103	1	665.702	−0.088	−12.395
15	201	202	453.362	0.262	91.903
16	202	203	709.856	0.076	10.737
17	203	3	537.241	0.061	8.775
18	2000	102	125.056	−0.184	−28.821
19	2001	201	425.949	0.049	7.074

وبسهولة يمكننا اكتشاف أن الرصده الرابعة (المسافة من النقطة ٣ إلي النقطة ٤) تعد الرصده الشاذة صاحبة أكبر قيمة للمتبقي القياسي.

أما نتائج ضبط الزوايا فكانت:

*** Adjusted Angle Observations ****

No.	From	Occ	To	Angle	Residual	Std. Res.
1	2	1	3	316°49'55.1"	114.6"	28.041
2	2	3	4	167°36'00.2"	212.2"	25.577
3	2	3	6	71°43'01.5"	10.0"	1.054
4	2	3	5	97°55'09.3"	−867.2"	−101.159
5	2	3	1	51°06'14.6"	−56.4"	−11.156
6	203	3	2	8°59'36.3"	−19.7"	−13.003
7	2	5	3	318°25'14.4"	259.9"	44.471
8	1	5	3	268°58'49.8"	557.3"	78.590
9	6	5	3	338°42'53.4"	374.9"	63.507
10	**3**	**5**	**4**	**322°02'24.7"**	**−8119.3"**	**−1781.060**
11	2000	102	103	162°23'50.9"	−2065.1"	−110.371
12	102	103	1	171°57'46.9"	−236.1"	−112.246
13	2001	201	202	263°58'31.6"	252.9"	104.430
14	201	202	203	101°52'56.4"	181.4"	57.971
15	202	203	3	176°50'15.9"	65.9"	23.278
16	102	2000	2001	109°40'18.6"	1764.6"	106.331
17	2000	2001	201	36°07'56.4"	210.2"	104.450

وأيضا يمكننا اكتشاف أن الرصده العاشرة (الزاوية ٣-٥-٤) تعد الرصده الشاذة صاحبة أكبر قيمة للمتبقي القياسي. لكن القاعدة العامة - كما سبق أن ذكرنا - أن نحدد رصده شاذة واحدة يجب حذفها. ففي هذا المثال وبالنظر إلي شكل الشبكة سنجد أن المسافة ٣-٤ تؤثر أيضا علي الزاوية ٣-٥-٤، بمعني أنه إن كانت المسافة ٣-٤ رصده شاذة فقد تكون هي السبب في ظهور هذه الزاوية كرصده شاذة أيضا. وحيث أن قيمة المتبقي القياسي للمسافة ٣-٤ أكبر من المتبقي القياسي للزاوية ٣-٥-٤، فسنقرر هنا أن نحذف المسافة فقط - ونترك الزاوية - في عملية الضبط الثانية.

وفي الضبط الثاني كانت النتائج كالتالي:

**** Adjusted Distance Observations ****

No.	From	To	Distance	Residual	Std. Res.
1	1	3	615.693	−0.047	−2.495
2	1	2	480.644	−0.066	−3.647
3	1	3	615.693	−0.047	−2.495
4	2001	201	425.902	0.002	0.265
5	3	6	201.963	−0.017	−1.032
6	3	5	410.439	−0.001	−0.032
7	3	2	422.684	−0.016	−0.858
8	5	2	629.557	−0.023	−1.280
9	5	1	450.656	−0.014	−0.858
10	5	6	246.590	−0.020	−1.241
11	5	4	397.885	−0.005	−0.380
12	5	3	410.439	−0.021	−1.082
13	102	103	327.298	−0.072	−10.380
14	103	1	665.751	−0.039	−5.506
15	201	202	453.346	0.246	86.073
16	202	203	709.807	0.027	3.857
17	203	3	537.193	0.013	1.922
18	2000	102	125.101	−0.139	−21.759

**** Adjusted Angle Observations ****

No.	From	Occ	To	Angle	Residual	Std. Res.
1	2	1	3	316°47′54.2″	−6.3″	−1.551
2	2	3	4	167°32′31.0″	3.0″	0.380
3	2	3	6	71°42′46.0″	−5.5″	−0.576
4	2	3	5	98°09′18.6″	−17.9″	−2.088
5	2	3	1	51°07′04.1″	−6.9″	−1.360
6	203	3	2	8°59′26.7″	−29.3″	−19.340
7	2	5	3	318°20′51.4″	−3.1″	−0.532
8	1	5	3	268°50′03.4″	30.9″	4.353
9	6	5	3	338°36′37.1″	−1.4″	−0.238
10	3	5	4	324°17′43.6″	−0.4″	−0.381
11	**2000**	**102**	**103**	**162°24′10.2″**	**−2045.8″**	**−109.353**
12	**102**	**103**	**1**	**171°57′51.2″**	**−231.8″**	**−110.360**
13	2001	201	202	263°58′20.3″	241.6″	99.714
14	201	202	203	101°52′34.7″	159.7″	51.023
15	202	203	3	176°49′56.1″	46.1″	16.273
16	**102**	**2000**	**2001**	**109°40′17.7″**	**1763.7″**	**106.280**
17	2000	2001	201	36°07′46.9″	200.7″	99.688

ومن الجدير بالملاحظة أن الزاوية ٣-٥-٤ لم تعد رصده شاذة بمجرد حذف المسافة ٣-٤، بمعني أن المسافة المحذوفة كانت بالفعل مؤثرة علي نتيجة الاختبار الإحصائي لهذه الزاوية. وتدل نتائج الضبط الثاني علي وجود ٣ زوايا كأرصاد شاذة، فنقوم بحذف الرصدة ١٢ (الزاوية ١٠٢-١٠٣-١) حيث أنها صاحبة قيمة أكبر متبقي قياسي، ونعيد عملية الضبط للمرة الثالثة:

****
Adjusted Distance Observations
****

Station Occupied	Station Sighted	Distance	V	Std.Res.
2001	201	425.88	−0.023	−3.25
201	202	453.09	−0.005	−3.25
202	203	709.76	−0.023	−3.25
203	3	537.16	−0.023	−3.25
5	3	410.45	−0.011	−0.60
5	4	397.89	−0.003	−0.19
5	6	246.60	−0.014	−0.83
5	1	450.68	0.013	0.80
5	2	629.58	0.003	0.15
3	2	422.70	0.003	0.16
3	1	615.75	0.008	0.40
3	5	410.45	0.009	0.44
3	6	201.97	−0.013	−0.78
1	2	480.71	−0.003	−0.19
1	3	615.75	0.008	0.40
2000	102	125.26	0.020	3.25
102	103	327.39	0.023	3.25
103	1	665.81	0.023	3.25

****
Adjusted Angle Observations
****

Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle	V	Std.Res.
102	2000	2001	109°11′11.1″	17.06″	3.25
2000	102	103	162°58′05.1″	−10.95″	−3.25
2000	2001	201	36°04′23.8″	−2.45″	−3.25
2001	201	202	263°54′15.7″	−2.97″	−3.25
201	202	203	101°49′46.3″	−8.72″	−3.25
202	203	3	176°49′01.0″	−8.98″	−3.25
203	3	2	8°59′51.1″	−4.91″	−3.25
2	1	3	316°48′02.8″	2.29″	0.57
3	5	4	324°17′43.8″	−0.19″	−0.19
6	5	3	338°36′37.0″	−1.51″	−0.26
1	5	3	268°49′43.7″	11.20″	1.57
2	5	3	318°20′51.1″	−3.44″	−0.59
2	3	1	51°07′14.4″	3.45″	0.68
2	3	5	98°09′22.0″	−14.55″	−1.71
2	3	6	71°42′48.5″	−2.97″	−0.31
2	3	4	167°32′29.5″	1.48″	0.19

وحيث أن نتائج عملية الضبط الثالثة لا تشير لوجود أية أرصاد شاذة outliers or blunders (لاحظ أننا نستخدم القيمة ٣.٢٩ كمستوي رفض في المعادلة ١٦-٣) فتعد نتائج هذه العملية هي النتائج النهائية للضبط، ومن ثم فأن الإحداثيات النهائية للشبكة تكون كالتالي:

****
Adjusted stations
****

station	x	y	σ_x	σ_y
1	2,477,233.72	420,353.59	0.071	0.069
2	2,477,497.89	419,951.98	0.050	0.083
3	2,477,832.55	420,210.21	0.062	0.107
4	2,477,991.64	420,400.58	0.077	0.121
5	2,477,630.43	420,567.45	0.088	0.093
6	2,477,665.22	420,323.32	0.071	0.096
102	2,476,455.89	419,741.38	0.024	0.018
103	2,476,735.05	419,912.42	0.051	0.070
201	2,476,576.23	419,589.23	0.020	0.022
202	2,476,948.74	419,331.29	0.029	0.041
203	2,477,463.84	419,819.58	0.040	0.077

<u>مثال ٢:</u>

للدلالة علي أهمية و تأثير تحليل اكتشاف الأرصاد الشاذة في الشبكات المساحية و الجيوديسية (مثل شبكات الجي بي أس) يعرض الجدول التالي قيم إحداثيات بعض نقاط شبكة جي بي أس مكونة من ٢٠ نقطة تم عمل ١٢ عملية ضبط LSA متكرر لأرصادها حتى أمكن اكتشاف و حذف جميع الأرصاد الشاذة بها. ويتبين من هذا الجدول مدي التحسن الذي طرأ علي دقة الشبكة حيث انخفضت قيم الأخطاء المعياري لإحداثيات النقاط بدرجة كبيرة و مؤثرة، مما يدل علي تأثير تحليل الأرصاد الشاذة في الوصول لمستوي دقة و مصداقية عالي.

Adj	St.	X	Y	Z
1 12	2	4896330.813±0.091 30.822±0.008	3167453.249±0.096 53.231±0.009	2575259.755±0.101 59.752±0.009
1 12	3	4900749.351±0.080 49.353±0.008	3165047.939±0.107 47.921±0.011	2569831.582±0.125 31.549±0.013
1 12	4	4899907.405±0.123 07.358±0.024	3164614.389±0.089 14.384±0.017	2571940.935±0.085 40.925±0.016
1 12	5	4899546.297±0.078 46.303±0.010	3166777.201±0.103 77.204±0.013	2569984.087±0.125 84.204±0.016

١٦-٣-٤ اكتشاف مصداقية الأرصاد

يعد معامل المصداقية لكل رصده redundancy number أحد أساليب تحليل الأرصاد و بيان مدي تأثير كل رصده من مجموعة الأرصاد علي مصداقية و جودة الشبكة المساحية ككل، ويتم حسابه بالمعادلة:

$$r_i = q_{ii} w_{ii} \qquad (16\text{-}4)$$

حيث:

r_i معامل المصداقية redundancy number للرصدة i

q_{ii} العنصر القطري في مصفوفة التباين-الترابط للمتبقيات (المعادلة ١٦-٢) المناظر للرصدة i

w_{ii} العنصر القطري في مصفوفة الوزن المناظر للرصدة i

وتتراوح قيمة معامل المصداقية بين الصفر و الواحد، وهو يعد مؤشرا علي الترابط الهندسي geometrical strength لعملية الضبط. فكلما كانت القيم المتوسطة لمعامل المصداقية للشبكة صغيرة دل ذلك علي أن أرصاد الشبكة لا تحتوي اختبارات أو تحقيقات checks لاكتشاف الأرصاد الشاذة، أو بمعني آخر فأن احتمال وجود أرصاد شاذة لا يمكن اكتشافها يعد احتمالا كبيرا في هذه الحالة. أيضا كلما كانت قيم معامل المصداقية قريبة من الصفر دل ذلك علي أن عملية الضبط adjustment ذاتها لم تغير كثيرا في جودة الأرصاد الأصلية. أما إن كان معامل مصداقية رصده معينة يساوي الصفر فيدل ذلك علي أن هذه الرصدة لا يوجد لها أي تحقيق لضمان جودتها (لذلك تسمي الرصده غير المحققة no-check observation). وان كانت قيمة معامل مصداقية رصده معينة قريبة من الواحد فيدل ذلك علي أن هذه الرصده قد تم ضبطها بصحة precision عالية.

<u>مثال ١:</u>

الجدول التالي يقدم نتائج الضبط الثالث للمثال السابق (بعد اكتشاف و حذف جميع الأرصاد الشاذة) مع وجود قيم معامل المصداقية لأرصاد الشبكة في العمود الأخير:

****
Adjusted Distance Observations
****

Station Occupied	Station Sighted	Distance	V	Std.Res.	Red.#
2001	201	425.88	−0.023	−3.25	0.102
201	202	453.09	−0.005	−3.25	0.006
202	203	709.76	−0.023	−3.25	0.104
203	3	537.16	−0.023	−3.25	0.103
5	3	410.45	−0.011	−0.60	0.767
5	4	397.89	−0.003	−0.19	0.436
5	6	246.60	−0.014	−0.83	0.556
5	1	450.68	0.013	0.80	0.542
5	2	629.58	0.003	0.15	0.678
3	2	422.70	0.003	0.16	0.736
3	1	615.75	0.008	0.40	0.745
3	5	410.45	0.009	0.44	0.767
3	6	201.97	−0.013	−0.78	0.580
1	2	480.71	−0.003	−0.19	0.688
1	3	615.75	0.008	0.40	0.745
2000	102	125.26	0.020	3.25	0.082
102	103	327.39	0.023	3.25	0.101
103	1	665.81	0.023	3.25	0.104

****
Adjusted Angle Observations
****

Station Backsighted	Station Occupied	Station Foresighted	Angle	V	Std.Res.	Red.#
102	2000	2001	109°11′11.1″	17.06″	3.25	0.042
2000	102	103	162°58′05.1″	−10.95″	−3.25	0.014
2000	2001	201	36°04′23.8″	−2.45″	−3.25	0.010
2001	201	202	263°54′15.7″	−2.97″	−3.25	0.009
201	202	203	101°49′46.3″	−8.72″	−3.25	0.110
202	203	3	176°49′01.0″	−8.98″	−3.25	0.109
203	3	2	8°59′51.1″	−4.91″	−3.25	0.054
2	1	3	316°48′02.8″	2.29″	0.57	0.410
3	5	4	324°17′43.8″	−0.19″	−0.19	0.016
6	5	3	338°36′37.0″	−1.51″	−0.26	0.302
1	5	3	268°49′43.7″	11.20″	1.57	0.528
2	5	3	318°20′51.1″	−3.44″	−0.59	0.691
2	3	1	51°07′14.4″	3.45″	0.68	0.497
2	3	5	98°09′22.0″	−14.55″	−1.71	0.680
2	3	6	71°42′48.5″	−2.97″	−0.31	0.392
2	3	4	167°32′29.5″	1.48″	0.19	0.294

ومن هذا الجدول يمكننا اكتشاف وجود عدد من الأرصاد التي لها معامل مصداقية قليل جدا، مما يدل علي أنها أرصاد غير محققة un-checked بدرجة جيدة. وهذا بالطبع يدل علي وجود ضعف weakness في التركيب الهندسي للشبكة. وهنا يكون القرار السليم بإعادة رصد هذه القياسات مرة أخري، ومن ثم إعادة عملية الضبط كلها من جديد لزيادة مصداقية الشبكة المساحية.

وهناك طريقة أخري لبيان تأثير عملية الضبط علي الأرصاد باستخدام الاختبار الإحصائي F. ويتم ذلك بحساب ناتج قسمة الانحراف المعياري للرصدة المضبوطة علي الانحراف المعياري للرصدة الأصلية، ومقارنة هذا الناتج بالحدود المقبولة المستخرجة من جدول اختبار F test. ويمكن تبسيط هذا التحليل باستخدام المعادلة:

$$\sigma_{(l)} / \sigma_{(b)} < 0.8$$

حيث:

$\sigma_{(l)}$ الانحراف المعياري للرصدة المضبوطة i (أي العنصر القطري المناظر لهذه الرصدة في المصفوفة $\sigma_{(l)}$ من المعادلة ١١-٩)

σ_b الانحراف المعياري للرصدة الأصلية i

فان تحقق هذا الشرك فيدل ذلك علي وجود رصده ذات مصداقية reliable observation .

مثال ٢:

بالرجوع لمثال الترافرس المغلق المذكور بالفصل الثالث عشر (أنظر ١٣-٥) سيتم حساب مصفوفة التباين-الترابط للأرصاد المضبوطة كالتالي:

$$\sigma_{(l)} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5.067 \\ & 9.137 \\ && 10.240 \\ &&& 10.948 \\ &&&& 4.462 \\ &&&&& 0.0000081 \\ &&&&&& 0.0000121 \\ &&&&&&& 0.0000087 \\ &&&&&&&& 0.0000129 \\ &&&&&&&&& 0.0000144 \\ &&&&&&&&&& 0.0000143 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فأن الانحراف المعياري لكل رصده مضبوطة هو الجذر التربيعي لعناصر قطر هذه المصفوفة. ثم نحسب قيمة $\sigma_{(l)}/\sigma_{(b)}$ وتقارنه بالقيمة ٠.٨ كالتالي:

Observation		*Standard error of estimated observation* $\sigma_{(l)}$	*Standard error of observed observation* $\sigma_{(b)}$	*Test statistic* $\frac{\sigma_{(l)}}{\sigma_{(b)}}$	*Is* $\frac{\sigma_{(l)}}{\sigma_{(b)}} < 0.8$?
Angles	*ABE*	2.3″	5.0″	0.45	yes
	EBC	3.0″	5.0″	0.60	yes
	BCD	3.2″	5.0″	0.64	yes
	DEB	3.3″	5.0″	0.66	yes
	BEA	2.1″	5.0″	0.42	yes
Distance	*AB*	0.0028 m	0.004 m	0.71	yes
	AE	0.0035 m	0.004 m	0.87	no
	BC	0.0029 m	0.004 m	0.74	yes
	BE	0.0036 m	0.004 m	0.90	no
	CD	0.0038 m	0.004 m	0.95	no
	DE	0.0038 m	0.004 m	0.95	no

أي أن هناك ٤ أرصاد ليست ذات مصداقية جيدة un-reliable وهي المسافات AE, BE,CD, DE. أو بمعني آخر فأن أية أخطاء في هذه الأرصاد لن يكون من السهل اكتشافها في عملية ضبط مجموع أقل المربعات.

١٦-٣-٥ الشكل البيضاوي القياسي للأخطاء

الشكل البيضاوي القياسي للخطأ standard error ellipse هو مقياس غير نصي (بالرسم graphical) لبيان دقة الإحداثيات المضبوطة لنقاط الشبكة المساحية. وكلما كانت الأشكال البيضاوية لنقاط الشبكة صغيرة الحجم ومتناسقة في الشكل (وقريبة من شكل الدائرة) كلما دل ذلك علي جودة التركيب الهندسي العام للشبكة.

ويتم حساب نصف المحور الأكبر و نصف المحور الأصغر و زاوية الميل هذا الشكل البيضاوي كالآتي:

$$\tan 2t = 2q_{xy} /(q_{yy} - q_{xx}) \tag{16-5}$$

$$\sigma_u = \sigma_o \sqrt{q_{uu}} \tag{16-6}$$

$$\sigma_v = \sigma_o \sqrt{q_{vv}} \tag{16-7}$$

$$q_{uu} = q_{xx} \sin^2 t + 2q_{xy} \cos t \sin t + q_{yy} \cos^2 t \tag{16-8}$$

$$q_{vv} = q_{xx} \cos^2 t - 2q_{xy} \cos t \sin t + q_{yy} \sin^2 t \tag{16-9}$$

حيث:

t زاوية اتجاه الشكل البيضاوي (مقاسة مع اتجاه دوران عقرب الساعة بدءا من اتجاه الشمال).

σ_o الخطأ المعياري للرصدة ذات الوزن الواحد.

σ_u, σ_v الخطأ المعياري لإحداثيات النقطة في نظام الإحداثيات المحلية U,V وهما نصف المحور الأكبر و نصف المحور الأصغر للشكل البيضاوي القياسي للخطأ لهذه النقطة.

q_{yy}, q_{xx} العناصر القطرية لمصفوفة التباين-الترابط للإحداثيات المضبوطة في نظام X,Y

q_{xy} العنصر غير القطري off-diagonal (أي قيمة الترابط covariance) في مصفوفة التباين-الترابط للإحداثيات المضبوطة في نظام X,Y

q_{vv}, q_{uu} العناصر القطرية لمصفوفة التباين-الترابط للإحداثيات المضبوطة في نظام الإحداثيات المحلية U,V

مثال ١ (الحسابات):

في شبكة مثلثات كانت نتائج الضبط للنقطة A كالآتي:

$$\sigma_o = \pm 0.136m$$

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 1.198574 & -1.160249 \\ -1.160249 & 2.634937 \end{bmatrix}$$

يمكننا حساب القيم التالية:

$$\tan 2t = 2q_{xy} / (q_{yy} - q_{xx}) = 2(-1.160249)/(2.634937 - 1.198574) = -1.6155$$

إذن:

$$2t = \tan^{-1}(-1.16155) = 301^{o}\ 45.5'$$

$$t = 150^{o}\ 53'$$

$$q_{uu} = q_{xx}\sin^2 t + 2q_{xy}\cos t \sin t + q_{yy}\cos^2 t = 1.355815$$

$$q_{vv} = q_{xx}\cos^2 t - 2q_{xy}\cos t \sin t + q_{yy}\sin^2 t = 0.857493$$

$$\sigma_u = \sigma_o\sqrt{q_{uu}} = 0.136\sqrt{1.355815} = 0.25$$

$$\sigma_v = \sigma_o\sqrt{q_{vv}} = 0.136\sqrt{0.857493} = 0.10$$

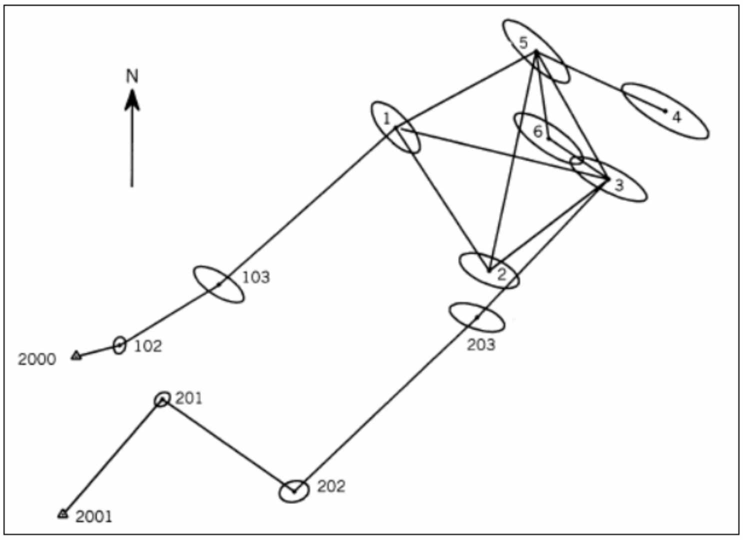
مثال ٢ (التحليل):

كانت النتائج النهائية (بعد اكتشاف و حذف الأرصاد الشاذة) لضبط الشبكة المساحية الأرضية السابقة كما يلي:

****
Adjusted stations
****

Station	X	Y	σ_x	σ_y	σ_u	σ_v	t
			Standard error ellipses computed				
1	2,477,233.72	420,353.59	0.071	0.069	0.092	0.036	133.47°
2	2,477,497.89	419,951.98	0.050	0.083	0.090	0.037	156.01°
3	2,477,832.55	420,210.21	0.062	0.107	0.119	0.034	152.80°
4	2,477,991.64	420,400.58	0.077	0.121	0.138	0.039	149.71°
5	2,477,630.43	420,567.45	0.088	0.093	0.123	0.036	136.74°
6	2,477,665.22	420,323.32	0.071	0.096	0.114	0.036	145.44°
102	2,476,455.89	419,741.38	0.024	0.018	0.024	0.017	80.86°
103	2,476,735.05	419,912.42	0.051	0.070	0.081	0.031	147.25°
201	2,476,576.23	419,589.23	0.020	0.022	0.024	0.017	37.73°
202	2,476,948.74	419,331.29	0.029	0.041	0.042	0.029	14.24°
203	2,477,463.84	419,819.58	0.040	0.077	0.081	0.032	160.84°

وباستخدام قيم الأعمدة الثلاثة الأخيرة في الجدول السابق (σ_u, σ_v نصفي قطر المحورين، و t زاوية الدوران) أمكن رسم الشكل البيضاوي القياسي للخطأ عند كل نقطة من نقاط الشبكة كما يتضح من الشكل التالي:



ومن هذا الشكل يمكننا استنباط بعض نقاط الشبكة التي لها شكل بيضاوي قياسي للخطأ كبير نسبيا في حجمه، مما يدل علي أن جودة ومصداقية نتائج ضبط هذه النقاط ليست عالية. ومن ثم فأن هذه الأشكال البيضاوية الكبيرة تعد مؤشرا علي ضعف التركيب الهندسي للشبكة. وهذه النتيجة هي نفس ما توصلنا إليه من تحليل معامل المصداقية السابق، لكن هنا بصورة غير نصية أو بالرسم graphically . ومرة أخري يكون القرار السليم في مثل هذه الحالة هو إعادة رصد هذه القياسات مرة أخري، ومن ثم إعادة عملية الضبط كلها من جديد لزيادة مصداقية الشبكة المساحية.

المراجع

المراجع العربية

الحسيني، محمد صفوت (٢٠٠٢) الجيوديسيا، كلية الهندسة، جامعة القاهرة.

شكري ، علي سالم و عبد الرحيم ، محمود حسني و مصطفي ، محمد رشاد الدين (١٩٩٤م) المساحة المستوية: الميزانيات و الكميات ، منشأه المعارف ، الإسكندرية ، مصر.

شكري ، علي سالم و عبد الرحيم ، محمود حسني و مصطفي ، محمد رشاد الدين (١٩٩٤م) المساحة الطبوغرافية و تطبيقاتها في الهندسة المدنية ، منشأه المعارف ، الإسكندرية ، مصر.

شكري ، علي سالم و عبد الرحيم ، محمود حسني و مصطفي ، محمد رشاد الدين (١٩٨٩م) المساحة الجيوديسية، منشأه المعارف ، الإسكندرية ، مصر.

شكري ، علي سالم و عبد الرحيم ، محمود حسني و مصطفي ، محمد رشاد الدين (١٩٩٨م) المساحة التصويرية و القياس الالكتروني و نظرية الأخطاء ، منشأه المعارف ، الإسكندرية ، مصر.

عبد العزيز ، يوسف إبراهيم و الحسيني ، محمد صفوت (٢٠٠٧م) المساحة ، دار المعرفة للنشر و التوزيع ، القاهرة ، مصر.

مصطفي ، محمد رشاد الدين ، (ب.ت) نظرية الأخطاء و تطبيقاتها في المساحة، الإسكندرية، مصر.

مصطفي ، محمد رشاد الدين ، (ب.ت) جبر المصفوفات وتصحيحات الأرصاد المساحية، الإسكندرية، مصر.

المؤسسة العامة لتعليم الفني والتدريب المهني (١٤٢٥هـ) الحساب المساحي، مقرر دراسي للكليات التقنية، الرياض ، المملكة العربية السعودية.

المراجع الأجنبية

Davis, R., Foote, F., Anderson, J. and Mikhail, E. (1981) Surveying: Theory and practice, 6th Ed., McGraw-Hill Co., New York, USA.

Dawod, G. (1992) Some considerations in the adjustment of GPS-derived baselines in the network mode, MSC Thesis, Ohio State University, USA.

Dawod, G. (1998) A national gravity standardization network for Egypt, PhD Thesis, Zagazig University, Egypt.

Fan, H. (2010) Theory of errors and least squares adjustment, Report No. 2015, Division of geodesy and geo-informatics, Royal institute of technology, Stockholm, Sweden.

Ghilani, C. and Wolf, P. (2006) Adjustment computations: Spatial data analysis, 4th edition, Wiley & Sons Inc., New Jersey, USA.

Ghilani, C. and Wolf, P. (2012) Elementary surveying: An introduction to geomatics, 13th edition, Prentice Hall, Boston, USA.

Mikhail, E. (1976) Observations and least squares, University Press of America Inc., London, England.

Moritz, H. (1972) Advanced least-squares methods, Report No. 175, Department of geodetic sciences, Ohio state university, Ohio, USA.

Nassar, M. (1994) Advanced geometric geodesy, Lecture notes, Department of public works, Faculty of engineering, Ain Shams university, Cairo, Egypt.

Schofield, W. and Breach, M. (2007) Engineering surveying, 6th edition, Elsevier, Boston, USA.

US Army Corps of Engineers (2001) Topographic surveying, Engineering field manual FM 3-34.331, Washington DC, USA.

US Army Corps of Engineers (2002) Geodetic and control surveying, Engineering manual EM 1110-1-1004, Washington DC, USA.

US Army Corps of Engineers (2003) NAVASTAR global positioning system surveying, Engineering manual EM 1110-1-1003, Washington DC, USA.

US NDSDI (US National Spatial Data Infrastructure) (1998) Geospatial positioning accuracy standards: Part 2 Standards for geodetic networks, FGDC-STD-007.2, Virginia, USA.

US NDSDI (US National Spatial Data Infrastructure) (2008) Geospatial information framework data content: Part 4 Geodetic control, FGDC-STD-014.4, Virginia, USA.

US FDCC (US Federal Geodetic Control Committee) (1984) Standards and specifications for geodetic control networks, Maryland, USA.

US FDCC (US Federal Geodetic Control Committee) (1988) Geometric geodetic accuracy standards and specifications or using GPS relative positioning techniques, version 5, Maryland, USA.

Wells, D. and Karakiwsky, E. (1971) The method of least squares, Lecture notes 18, Geodesy and geomatics engineering department, New Brunswik university, Canada.

ملحق رقم ١
بعض الجداول الإحصائية

أولا: جدول التوزيع الطبيعي

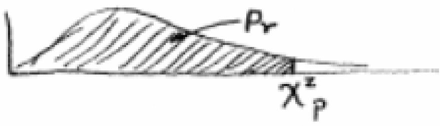
CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION - VALUES OF Pr

Values of Pr corresponding to c for the normal curve.
The value of Pr for (-c) equals one minus the value of Pr for (+c).

c	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

ثانيا: جدول توزيع مربع كاي

PERCENTILES OF THE χ^2 DISTRIBUTION



Values of χ^2_p corresponding to Pr.

ν	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
1	.000039	.00016	.00098	.0039	.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.0717	.115	.216	.352	.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.43	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.64

PERCENTILES OF THE χ^2 DISTRIBUTION

PROBABILITY FUNCTIONS

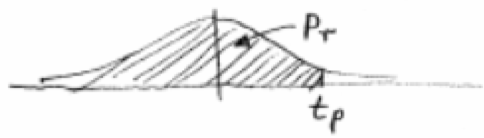
PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2-DISTRIBUTION—VALUES OF χ^2 IN TERMS OF Q AND ν

$\nu \backslash Q$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25
1	(−5) 3.92704	(−4) 1.57088	(−4) 9.82069	(−3) 3.93214	0.0157908	0.101531	0.454937	1.32330
2	(−2) 1.00251	(−2) 2.01007	(−2) 5.06356	0.102587	0.210720	0.575364	1.38629	2.77259
3	(−2) 7.17212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375	1.212534	2.36597	4.10835
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623	1.92255	3.35670	5.38527
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.2188
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.3887
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182	12.5489
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410	13.7007
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403	14.8454
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398	15.9839
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393	17.1170
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389	18.2451
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385	19.3688
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381	20.4887
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369	27.1413
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367	28.2412
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364	30.4345
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363	31.5284
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363	32.6205
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362	33.7109
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360	34.7998
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354	45.6160
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347	66.9814
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344	77.5766
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342	98.6499
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341	109.141
X	−2.5758	−2.3263	−1.9600	−1.6449	−1.2816	−0.6745	0.0000	0.6745

$$Q(\chi^2|\nu)=\left[2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}\int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, t^{\frac{\nu}{2}-1}\, dt$$

ثانيا: جدول توزيع t

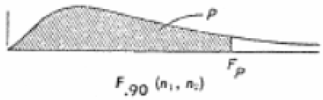
PERCENTILES OF THE t DISTRIBUTION



ν	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ثانيا: جدول توزيع F

PERCENTILES OF THE F DISTRIBUTION



$F_{.90}(n_1, n_2)$

n_1 = degrees of freedom for numerator

n_2 = degrees of freedom for denominator

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.50	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.11	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.81	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

PERCENTILES OF THE F DISTRIBUTION

$F_{.95}(n_1, n_2)$

n_1 = degrees of freedom for numerator

n_2 = degrees of freedom for denominator

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

ملحق رقم ٢
بعض المواصفات الأمريكية المساحية

١-١ المواصفات الأمريكية للمساحة بالجي بي أس

١-١-١: مواصفات الشبكات الجيوديسية

المواصفات التقليدية (الأولي) للجنة الوطنية الأمريكية للثوابت الجيوديسية (US FDGC, 1984 and 1988) :

النوع	الدرجة	المواصفات عند مستوى ثقة ٩٥%		
		الخطأ الأساسي (سم)	الخطأ النسبي المعتمد علي طول الخط	
			ppm	١ : ؟
شبكات مراقبة تحركات القشرة الأرضية	AA	٠.٣	٠.٠١	١ : ١٠٠،٠٠٠،٠٠٠
شبكات الثوابت الجيوديسية الوطنية الأساسية	A	٠.٥	٠.١	١ : ١٠،٠٠٠،٠٠٠
شبكات الثوابت الجيوديسية الوطنية الثانوية	B	٠.٨	١	١ : ١،٠٠٠،٠٠٠
الشبكات المرجعية الأرضية لتطبيقات الخرائط ونظم معلومات الأراضي والمشروعات الهندسية	C: 1 2 A 2 B 3	 ١.٠ ٢.٠ ٣.٠ ٥.٠	 ١٠ ٢٠ ٥٠ ١٠٠	 ١ : ١٠٠،٠٠٠ ١ : ٥٠،٠٠٠ ١ : ٢٠،٠٠٠ ١ : ١٠،٠٠٠

أيضا قامت اللجنة الوطنية للمواصفات المكانية الأمريكية (US NSDI, 1998 and 2008) بعمل تصنيف آخر لمواصفات الشبكات الجيوديسية والمساحية بناءا علي دقتها وليس نوعها، وهو يعتمد علي تحديد قيمة الدقة المحلية المتوسطة للشبكة. فمثلا عندما نقول أن هذه شبكة بدقة ١ ملليمتر فيدل ذلك علي أن الخطأ المتوقع للشبكة عند مستوى ثقة ٩٥% يساوي أو أقل من ١ ملليمتر. وعندما نقول أن شبكة أخري لها دقة ١ سنتيمتر فيدل ذلك علي أن الخطأ المتوقع للشبكة عند مستوى ثقة ٩٥% يساوي أو أقل من ١ سنتيمتر، وهكذا.

ويتم تحديد مستوي دقة أي شبكة كالتالي:

- يتم ضبط أرصاد الشبكة LSA بنوع الضبط غير المشروط un-constrained or minimal-constraint or free net adjustment
- يتم تطبيق المعايير الإحصائية (مثل اختبار مربع كاي) لبيان عدم وجود أية أخطاء كبيرة في الأرصاد و ضمان أن الأوزان المستخدمة في الضبط مناسبة و ملائمة لأرصاد الشبكة.
- يتم تطبيق اختبارات اكتشاف القياسات الشاذة outliers or blunders والتخلص منها حتى نصل لشبكة خالية من هذه القياسات الخاطئة لتكون هي المستخدمة في الضبط النهائي.

- يتم حساب المتوسط الحسابي لقيم دقة نقاط الشبكة الناتجة من عملية الضبط النهائي فيكون هذا الرقم هو مؤشر دقة الشبكة.

ومن ثم فأن تصنيف الشبكات الجيوديسية و المساحية يصبح كالتالي:

تصنيف الدقة Accuracy Classification	عند مستوي ثقة ٩٥% يكون أقل من أو يساوي (بالمتر)
١ ملليمتر ٢ ملليمتر ٥ ملليمتر	٠.٠٠١ ٠.٠٠٢ ٠.٠٠٥
١ سنتيمتر ٢ سنتيمتر ٥ سنتيمتر	٠.٠١٠ ٠.٠٢٠ ٠.٠٥٠
١ ديسيمتر ٢ ديسيمتر ٥ ديسيمتر	٠.١٠٠ ٠.٢٠٠ ٠.٥٠٠
١ متر ٢ متر ٥ متر	١.٠٠٠ ٢.٠٠٠ ٥.٠٠٠
١٠ متر	١٠.٠٠٠

١-١-٢: مواصفات العمل الجيوديسي

البند	الدرجة			
	AA	A	B	C
أقل عدد لنقاط الربط الأفقية	٤	٣	٣	٢
أقل عدد لنقاط الربط الرأسية	٥	٥	٥	٤
أقل مسافة بين مركز المشروع ونقاط التحكم الموجودة (حيث: ف = أقصي مسافة بالكيلومتر بين مركز المشروع وأي نقطة في المشروع)	١٠٠ف	١٠ف	٧ف	٥ف
الحاجة لاستخدام أجهزة ثنائية التردد	نعم	نعم	نعم	اختياري
عدد الأجهزة التي ترصد في نفس الوقت لا يقل عن	٥	٥	٤	٣
فترة الرصد (دقيقة) لا تقل عن	١٨٠	١٢٠	٦٠	٢٠-٣٠
زاوية القناع لا تزيد عن (درجة)	١٠	١٥	٢٠	٢٠-٤٠
نسبة عدد النقاط المحتلة ثلاثة مرات (في أكثر من فترة) لا يقل عن:	%٨٠	%٤٠	%٢٠	%١٠
نسبة عدد النقاط المحتلة مرتين (في أكثر من فترة) لا يقل عن: - النقاط الجديدة - نقاط التحكم الرأسية - نقاط التحكم الرأسية	 %١٠٠ %١٠٠ %١٠٠	 %٨٠ %١٠٠ %٧٥	 %٥٠ %١٠٠ %٥٠	 %٣٠ %١٠٠ %٢٥

محيط الحلقة لا يزيد عن (كم)	٢٠٠٠	٣٠٠	١٠٠	١٠٠
خطأ قفل الحلقة لا يزيد عن (سم)	١٠	١٠	١٥	٢٥ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ١٠٠
خطأ قفل الحلقة لا يزيد عن (ppm)	٠.٢	٠.٢	١.٢٥	١٢ ، ٢٥ ، ٦٠ ، ١٢٥
فرق طول خط القاعدة متكرر الرصد لا يزيد عن (ppm)	٠.٠١	٠.١	١	١٠ ، ٢٠، ٥٠ ، ١٠٠

١-١-٣: مواصفات العمل الطبوغرافي

البند	درجة الشبكات			
	الثانية أ	الثانية ب	الثالثة أ	الثالثة ب
الدقة النسبية ppm	٢٠	٥٠	١٠٠	٢٠٠
عدد نقاط الربط علي شبكات الثوابت الجيوديسية: أقل عدد أفضل عدد	 ٢ ٣	 ٢ ٣	 ٢ ٢	 ٢ ٢
المسافة بين النقاط الجديدة لا تقل عن (متر)	١٠٠٠	٥٠٠	٢٠٠	١٠٠
خطأ القفل: أقصي عدد لخطوط القواعد في الحلقة أقصي طول للحلقة لا يزيد عن (كم)	 ١٠ ١٠٠	 ٢٠ ٢٠٠	 ٢٠ غير مطلوب	 ٢٠ غير مطلوب
مواصفات الرصد الثابت: هل مطلوب أجهزة ثنائية التردد: للخطوط أقل من ٥٠ كم للخطوط أكبر من ٥٠ كم طول فترة الرصد المقترح (دقيقة) زاوية القناع المقترحة (درجة)	 لا نعم ٦٠ ١٥	 لا نعم ٤٥ ١٥	 لا نعم ٣٠ ١٥	 لا نعم ٣٠ ١٥
مواصفات العمل المتحرك: أقل عدد للنقاط المرجعية أقصي قيمة PDOP	 ٢ ١٥	 ٢ ١٥	 ١-٢ ١٥	 ١ ١٥
الضبط: نوع الضبط الأوزان المقترحة للأرصاد: أفقيا رأسيا	الشبكة الحرة Free ± ٥ مللي + ٢ ppm ± ١٠ مللي + ٢ ppm			

١-٢ مواصفات مساحية أخرى

١-٢-١: مواصفات الميزانيات

البند	الدرجة والنوع				
	أولي ١	أولي ٢	ثانية ١	ثانية ٢	ثالثة
نوع و دقة الميزان المستخدم	٠.٢ مللي/كم دقيق	٠.٤ مللي/كم عادي	٠.٤ مللي/كم أوتوماتكي له ميكرومتر	٠.٨ مللي/كم أوتوماتكي له ميكرومتر	رقمي
أقل ترقيم علي القامة (مللي)	٥	٥	٥ أو ١٠	٥ أو ١٠	١٠
أكبر قيمة لخطأ القراءة (مللي/م)	٠.٠٥	٠.٠٥	٠.٠٥	٠.٠٥	٠.١٠
تسجيل القراءات لأقرب (مللي)	٠.٠١	٠.٠١	٠.١	٠.١	١
أقصي طول للرصدة (م)	٥٠	٦٠	٦٠	٧٠	٩٠
الرصدة الأمامية و الخلفية متوافقين حتى (م)	٢	٥	٥	١٠	١٠
وقت الرصد	قبل ١٠ ص و بعد ٢ م	قبل ١٠ ص و بعد ٢ م	قبل ١٠ ص و بعد ٢ م	أي وقت طالما يسمح الوقت بقراءة دقيقة	
أقصي خطأ قفل للخط (ملي)	$3\sqrt{km}$	$4\sqrt{km}$	$6\sqrt{km}$	$8\sqrt{km}$	$12\sqrt{km}$
أقصي خطأ قفل للحلقة (ملي)	$4\sqrt{km}$	$5\sqrt{km}$	$6\sqrt{km}$	$8\sqrt{km}$	$12\sqrt{km}$

١-٢-٢: مواصفات قياسات الزوايا للرفع الطبوغرافي

البند	الدرجة والنوع				
	أولي ١	أولي ٢	ثانية ١	ثانية ٢	ثالثة
أقل قراءة للجهاز	"٠.٢	"٠.٢	"١.٠	"١.٠	"١.٠
أقل عدد لنقاط الثوابت الأرضية	٤	٣	٢	٢	٢
خطأ القفل النسبي	١ : ١٠٠،٠٠٠	١ : ٥٠،٠٠٠	١ : ٢٠،٠٠٠	١ : ١٠،٠٠٠	١ : ٥،٠٠٠
أقصي فرق إحداثيات لنقاط الثوابت	$0.04\sqrt{km}$	$0.08\sqrt{km}$	$0.20\sqrt{km}$	$0.40\sqrt{km}$	$0.80\sqrt{km}$

ملحق رقم ٣

ملفات تدريبية باللغة العربية على الانترنت

أولا: ملفات فيديو لمحاضرات علمية عامة

الهندسة المساحية:

http://youtu.be/cUj9XgOW-7M

الجيوماتكس:

http://youtu.be/oqP0jROrjYc

الجيوديسيا: أسس علمية:

الجزء الأول:

http://youtu.be/NdJ1xV1QqAA

الجزء الثاني:

http://youtu.be/uU-BLz-O3rQ

الرفع المساحي بالجي بي أس:

الجزء الأول:

http://youtu.be/2D_ZIvNo6rA

الجزء الثاني:

http://youtu.be/UtZFq2kGhTQ

نظم المعلومات الجغرافية: أسس علمية:

الجزء الأول:

http://youtu.be/TzxnG3iSYYs

الجزء الثاني:

http://youtu.be/rBPytfnU0FM

التحليل المكاني في إطار نظم المعلومات الجغرافية:

الجزء الأول:

http://youtu.be/ueqm-jFrfUQ

الجزء الثاني:

http://youtu.be/buDf9FMnjM0

الخرائط: أسس علمية:

الجزء الأول:

http://youtu.be/u2148AXIG70

الجزء الثاني:

http://youtu.be/vZN4pp4ud3g

الصور الجوية و المرئيات الفضائية:

الجزء الأول:

http://youtu.be/Dty61-5dSpo

الجزء الثاني:

http://youtu.be/0M0R9UrCUDs

توسعة المسجد الحرام عبر التاريخ:

النسخة العربية:

http://youtu.be/oJ-dUlHkLpg

النسخة الانجليزية:

http://youtu.be/bb52H1c_Z6M

جغرافية مصر باستخدام نظم المعلومات الجغرافية:

http://youtu.be/kU5wertjKVo

جغرافية مدينة مكة المكرمة و المشاعر المقدسة

http://youtu.be/6TxI1L4kK1w

ثانيا: كتب باللغة العربية:

مبادئ المساحة:

http://www.academia.edu/1536378/Principles_of_Surveying_in_ARABIC_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/W7ZVbmUR/__2012.html

الجيوماتكس: علم المعلوماتية الأرضية

http://www.academia.edu/4954764/Geomatics_in_Arabic_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/_kV-o1gx/_2014.html

المدخل إلي النظام العالمي لتحديد المواقع:

http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Books/819875/An_Introduction_to_GPS_in_ARABIC_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/cF64h3W2/____2010.html

أسس المساحة الجيوديسية و الجي بي أس:

http://www.academia.edu/1823906/_Geodetic_Syrveys_and_GPS_in_ARABIC_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/kCpAymjl/2012.html

المدخل إلي الخرائط الرقمية:

http://www.academia.edu/1228037/Computer_Mapping_in_Arabic_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/sktltH1z/__2012.html

التحليل المكاني في إطار نظم المعلومات الجغرافية:

http://www.academia.edu/2005738/_GIS_Spatial_Analysis_in_Arabic_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/HvM0Ay-K/2012.html

المدخل إلي الخرائط:

http://www.academia.edu/4489179/_An_Introduction_to_Maps_in_ARABIC_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/4uxcDpt8/___2013.html

مقدمة في الصور الجوية و المرئيات الفضائية:

http://www.academia.edu/4349921/An_Introduction_to_Aerial_Photographs_and_Satellite_Images_in_ARABIC_

وأيضا:

http://www.4shared.com/office/79bhYBKb/____2013.html

ثالثا: ملفات تعليمية:

معجم مصطلحات النظام العالمي لتحديد المواقع:
http://uqu.edu.sa/files2/tiny_mce/plugins/filemanager/files/4260086/Dawod_GPS_Glossary_Ar_v1.pdf

and:

http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Teaching/25550/ARABIC_Glossary_of_GPS_

تحسين دقة حسابات الجي بي أس:
http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Teaching/25553/IGS_GPS_Products_in_ARABIC_

الجي بي أس والجيويد:
http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Teaching/25552/GPS_and_the_Geoid_in_ARABIC_

معجم مصطلحات المساحة الجيوديسية:
http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Teaching/25551/ARABIC_Geodestic_Glossary_

المرجع الجيوديسي و نظام إحداثيات جمهورية مصر العربية:
https://www.academia.edu/1741808/Geodetic_Datum_of_Egypt_in_ARABIC_

المرجع الجيوديسي و نظام إحداثيات المملكة العربية السعودية:

http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Teaching/25556/Geodetic_Datum_of_Saudi_Arabia_in_ARABIC_

تحميل ملفات نموذج الارتفاعات الرقمية SRTM3 :

http://nwrc-egypt.academia.edu/GomaaDawod/Teaching/25557/SRTM_DEM_in_ARABIC_

نبذة عن المؤلف

- الدكتور جمعة محمد داود محمود من مواليد السويس بجمهورية مصر العربية في عام ١٩٦٢م (الموافق ١٣٨٣هـ).
- حصل علي درجة البكالوريوس في الهندسة المساحية في عام ١٩٨٥م من كلية الهندسة بشبرا – جامعة بنها بمصر ، ودرجة الماجستير من قسم العلوم الجيوديسية والمساحة من جامعة ولاية أوهايو بالولايات المتحدة الأمريكية في عام ١٩٩١م، ودرجة الدكتوراه في عام ١٩٩٨م من كلية الهندسة بشبرا، جامعة بنها بمصر.
- حصل د. جمعة داود علي درجة أستاذ مشارك في عام ٢٠٠٤م وكذلك درجة الأستاذية في الهندسة المساحية في عام ٢٠٠٩م (١٤٢٩ هـ).
- يعمل د. جمعة داود منذ عام ١٩٨٧م بمعهد بحوث المساحة بوزارة الموارد المائية والري بمصر، وعمل بجامعة أم القرى بمكة المكرمة بالمملكة العربية السعودية في الفترة ٢٠٠٥-٢٠١٤م (١٤٢٦-١٤٣٥ هـ).
- فاز د. جمعة داود بجائزة أفضل بحث في المساحة في مصر في أعوام ٢٠٠٥، ٢٠٠٦، ٢٠٠٧، ٢٠٠٩م كما تم اختياره في الموسوعة الدولية للعلوم والهندسة Who is Who للفترة ٢٠١١-٢٠١٢م.
- نشر د. جمعة داود حتى الآن خمسون بحثا في الجيوماتكس منهم عشرون ورقة علمية في مجلات عالمية و مؤتمرات دولية في كل من الولايات المتحدة الأمريكية و انجلترا و ايطاليا و استراليا بالإضافة للنشر في مجلات و مؤتمرات في كلا من المملكة العربية السعودية و مملكة البحرين والمملكة المغربية و جمهورية مصر العربية، كما نشر ٩ كتب باللغة العربية في مجالات و تقنيات الجيوماتكس.
- د. جمعة داود متزوج من د. هدي فيصل الباحثة بمعهد بحوث المساحة وله ثلاثة أبناء مصطفي و محمد و سلمي.
- حج د. جمعة داود بيت الله الحرام أربعة مرات وأعتمر عدة مرات.